Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

4.2-3 Propiedades del determinante. Área y volumen

(1) Encuentre el determinante de cada matriz usando reducción de filas.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ -7 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

(2) Muestre que si A es una matriz con dos filas iguales, entonces su determinante es cero.

(3) Muestre que si A es una matriz con dos **columnas** iguales, entonces su determinante es cero.
Ayuda: recuerde que el determinante de A y su transpuesta son iguales.

(4) Encuentre dos matrices A y B tales que $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

(5) Muestre las siguientes afirmaciones

(a) Sea A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea B la matriz que se obtiene de multiplicar una fila de A por α. Entonces $\det(B) = \alpha \det(A)$.

(b) Sea A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea B la matriz que se obtiene de multiplicar **todas** las filas de A por α. Entonces $\det(B) = \alpha^n \det(A)$.

Ayuda: recuerde que multiplicar una fila por un escalar equivale a multiplicar por una matriz elemental.

(6) Sean A, B y C tres matrices de tamaño 3×3 tales que

$$\det(A) = -1, \quad \det(B) = 3, \quad \det(C) = -2.$$

Encuentre los siguientes determinantes

(a) $\det(ABC)$,

(b) $\det(BC^{-1})$,

(c) $\det(BC) + \det(AB)$,

(d) $\det(2A)$,

(e) $\det(-B) + \det(-C)$,

(f) $\det(B^2CA^{-1})$,

(g) $\det(B^{-2}A^2)$,

(h) $\det\big((B^{-1}C^2)^T(A^T)^{-1}A\big)$.

Donde B^{-2} se refiere al producto $B^{-1}B^{-1}$.

(7) Determine si la matriz

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

es invertible.

(8) Encuentre el área encerrada por el paralelogramo definido por los vectores $\vec{\mathbf{v}} = (1,2)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-1,2)$.

(9) Encuentre el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (1,2,0)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1,-1,2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1,1,1)$.

(10) Muestre que el área del paralelogramo generado por los vectores (a_{11}, a_{12}) y (a_{21}, a_{22}) esta dado por $|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$.

Ayuda: utilice el producto cruz para encontrar una expresión del área.