UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

3.7-3.8 Matrices elementales y transpuesta

(1) Escriba cada una de las matrices como producto de matrices elementales. Luego encuentre la transpuesta de la matriz.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Solución: debemos reducir la matriz hasta llegar a la identidad:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_{F_1 \to F_1 + F_2} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_{F_2 \to F_2 - 3F_1} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{F_3 \to F_3 - F_1} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{F_3 \to F_3 - F_2}$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_3 \to F_3/4} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_1 \to -F_1} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_1 \to F_1 + 3F_3} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_2 \to F_2 + 9F_3} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_2 \to F_2/2}$$

Cada operación entre filas corresponde a una matriz elemental. La matriz A_2 será el producto de la inversa de cada una de estas matrices elementales.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La transpuesta se consigue cambiando filas con columnas y viceversa.

$$A_2^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rta.: $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rta.: $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2) Suponga que A_1, A_2, …, A_n son matrices de tamaño $n \times n$. Muestre que

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$$

(3) Exprese **la transpuesta** de cada matriz como producto de elementales.

(a) $B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ayuda: note que estas matrices ya las estudió en el Ejercicio (1). No necesita transponer para luego reducir. Puede usar la multiplicación en matrices elementales del primer ejercicio y el resultado del Ejercicio (2)

(4) Encuentre dos matrices elementales E_1 y E_2 (de cualquier tamaño) tales que $E_1E_2 = E_2E_1$.

(5) Sea E la matriz elemental

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre una forma vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, 2, 1)$.

Rta.: $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = 1$

(b) Aplique la matriz elemental a la recta, es decir, calcule $E\vec{\mathbf{r}}$ donde $\vec{\mathbf{r}}$ es la forma vectorial de la recta.

Rta.: $(2 + 2t, 1 + t, 1)$

(c) Determine la dirección de la recta $E\vec{\mathbf{v}}$.

Rta.: $(2, 2, 0)$

(d) Encuentre el coseno del ángulo que forman las direcciones de la recta inicial con la recta $E\vec{\mathbf{v}}$.

Rta.: $\pi/3$