Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

3.5-3.6 Inversa de una matriz

(1) Encuentre la inversa de cada una de las siguientes matrices.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & -3/4 \end{bmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/8 & 9/8 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

(c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ **Rta.:** no tiene inversa

(d) $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ -5/4 & 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **Rta.:** no tiene inversa

(f) $A_6 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} -1/8 & 3/2 & 7/8 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

(g) $A_7 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ -7 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

(h) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

(2) Muestre que el sistema

$$\begin{cases} -7x - 5y - z = a, \\ 12x + 9y + 2z = b, \\ -12x - 7y = c, \end{cases}$$

siempre tiene solución para todo a, b y c y encuentre la solución general en términos de a, b y c.

Ayuda: la matriz asociada a la transformación, ¿es invertible?

(3) Suponga que A es una matriz invertible. Muestre que la función $T(\vec{\mathbf{v}}) = A\vec{\mathbf{v}}$ es una función inyectiva. Es decir, si $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ son dos vectores tales que $T(\vec{\mathbf{v}}_1) = T(\vec{\mathbf{v}}_2)$ entonces $\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$.

Solución: suponga que $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ son tales que $T\vec{\mathbf{v}}_1 = T\vec{\mathbf{v}}_2$, entonces $A\vec{\mathbf{v}}_1 = A\vec{\mathbf{v}}_2$. Como A es invertible entonces existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I_3$. Multiplicando $A\vec{\mathbf{v}}_1 = A\vec{\mathbf{v}}_2$ por A^{-1} por la izquierda obtenemos $A^{-1}A\vec{\mathbf{v}}_1 = A^{-1}A\vec{\mathbf{v}}_2$, es decir: $I_3\vec{\mathbf{v}}_1 = I_3\vec{\mathbf{v}}_2$, lo cual implica $\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$. La función es inyectiva.

(4) Muestre que si A es una matriz invertible entonces la única solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ es $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Ayuda: use un argumento similar al del punto anterior.

(5) Sean A, B y C tres matrices invertibles de igual tamaño. Muestre que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

(6) Suponga que $A \in M(n \times n)$ es una matriz invertible tal que $A = A^{-1}$. Muestre que $(A+A^{-1})^2 = 4I_n$ donde I_n es la matriz identidad de tamaño n.

Solución: note que $(A + A^{-1})^2 = (2A)^2 = 4A^2 = 4AA = 4AA^{-1} = 4I_n$.

(7) Encuentre dos matrices invertibles A y B de igual dimensión, tales que $A + B$ sea invertible y $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.