Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

3.4 Álgebra de matrices

(1) Las matrices A, B y C son desconocidas, pero tienen tamaños

$$A \in M(2\times 3),\quad B \in M(3\times 2),\quad C \in M(2\times 2),\quad D \in M(3\times 3).$$

Determine cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar:

(a) AB, **Rta.:** sí
(b) BC, **Rta.:** sí
(c) CD, **Rta.:** no
(d) $AB + C$, **Rta.:** sí
(e) $AB + D$, **Rta.:** no
(f) $BA + D$, **Rta.:** sí
(g) $C(AB + C)$, **Rta.:** sí
(h) $D(BA + D)$, **Rta.:** no
(i) $ADBC$. **Rta.:** no

(2) Para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

Halle las siguientes expresiones

(a) AB, **Rta.:** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) BC, **Rta.:** $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $CA + 2B$, **Rta.:** $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(d) BCA. **Rta.:** $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

(3) Encuentre AB y BA donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Rta.: $AB = -3$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & -6 & -2 \\ 6 & -3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

(4) Sea A la matriz definida como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para cada vector dado, haga una gráfica del vector dado y del resultado del vector por la matriz.

(a) $\vec{\mathbf{u}} = (2, 0)$,
(b) $\vec{\mathbf{v}} = (0, -2)$,
(c) $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 2)$,
(d) $\vec{\mathbf{x}} = (2, 2)$,

Basado en estos gráficos determine geométricamente qué acción realiza la matriz A sobre los vectores en $\mathbb{R}^2$.

(5) **Derivadas y matrices.** Sea D la matriz dada por

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos a asociar cada polinomio de grado a lo sumo dos $ax^2 + bx + c$ con el vector $\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)$. Por ejemplo, el polinomio $2x^2 - 3$ sería el vector $\vec{\mathbf{v}} = (2, 0, -3)$.

Encuentre el vector asociado a cada polinomio

(a) $3x^2 - 2x + 4$,

(b) $5x^2 + 3x$,

(c) $3x + 1$,

(d) $5x^2$.

Ahora vamos a investigar qué sucede al multiplicar la matriz por el vector obtenido de cada polinomio.

(e) Para cada uno de los vectores de los polinomios previamente encontrados calcule $D\vec{\mathbf{v}}$.

(f) Para cada producto $D\vec{\mathbf{v}}$, escriba el polinomio correspondiente. Es decir, si el resultado del producto fue $D\vec{\mathbf{v}} = (3, -4, -1)$ es porque se refiere al polinomio $3x^2 + (-4)x + (-1) = 3x^2 - 4x - 1$.

(g) Finalmente, encuentre la derivada de cada uno de los polinomios listados previamente.

¿Qué podemos concluir acerca de la matriz D? ¿qué acción hace la matriz sobre los polinomios de grado a lo sumo dos?

Más adelante estudiaremos espacios vectoriales, transformaciones lineales y bases, donde daremos claridad a la naturaleza de esta matriz.