Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

3.3 Matrices y sistemas lineales

(1) Para cada matriz A y cada vector $\vec{\mathbf{v}}$ encuentre el producto $A\vec{\mathbf{v}}$.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = 3$

(2) Represente la solución de cada sistema en la forma $\vec{\mathbf{v}}_{\text{particular}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{homogéneo}}$.

(a) $\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 3x - y - 2z = 1. \end{cases}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ x - y = 0, \\ -x - 4y - z = 0, \\ 5x + z = 0. \end{cases}$ **Rta.:** $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ x - y - z = 1, \\ 2x + y + z = 2. \end{cases}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ **Rta.:** $\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 3, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$$

En clase estudiamos que la **representación** de las soluciones no es única. Por ejemplo, si las soluciones representan una recta, no existe una única forma de representar esa recta.

(a) Encuentre la solución general al problema, expresándola como $\vec{\mathbf{v}}_{\text{particular}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{homogéneo}}$.
Rta.: $x = t/2$, $y = t$, $z = -1$, $t \in \mathbb{R}$

(b) Muestre que $x = 50$, $y = 100$, $z = -1$ es una solución particular al sistema.

(c) Muestre que $x = 50$, $y = 100$, $z = 0$ es una solución al problema homogéneo asociado al sistema.

(d) Disponemos de dos soluciones, la que encontraste en el ítem (3a) y la solución

$$x = 50 + s, \quad y = 100 + 2s, \quad z = -1.$$

Muestre que estas soluciones representan lo mismo.

(4) Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -9 & 3 \\ 6 & 8 & -2 \\ -6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Muestre que si $\vec{\mathbf{v}}_1 = (3, -2, 2)$ entonces $A\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$.

(b) Muestre que si $\vec{\mathbf{v}}_2 = (1, -2, -3)$ entonces $A\vec{\mathbf{v}}_2 = 2\vec{\mathbf{v}}_2$.

(c) Encuentre todos los vectores $\vec{\mathbf{v}}$ tales que $A\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{v}}$.
Sugerencia: suponga que $\vec{\mathbf{v}} = (x, y, z)$ es tal que $A\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{v}}$. Muestre que x, y y z satisfacen el sistema

$$\begin{cases} -9x - 9y + 3z = 0 \\ 6x + 6y - 2z = 0 \\ -6x - 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

Rta.: $\vec{\mathbf{v}} = t(1, 0, 3) + s(-1, 1, 0)$

Estos vectores hacen parte de un espacio vectorial llamado espacio propio y que estudiaremos a profundidad en las últimas secciones del curso.

(5) Muestre que si $\vec{\mathbf{x}}$ es solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{x}}_h$ es solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, entonces $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}_h$ también es solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Solución: si $\vec{\mathbf{x}}$ es una solución al sistema entonces $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{v}}_h$ es una solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ entonces $A\vec{\mathbf{v}}_h = \vec{\mathbf{0}}$. Luego $A(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}_h) = A\vec{\mathbf{x}} + A\vec{\mathbf{x}}_h = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{b}}$. Entonces $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}_h$ es solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

(6) Muestre que si $\vec{\mathbf{x}}_1$ es solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$ entonces para todo λ el vector $\lambda\vec{\mathbf{x}}_1$ también es solución al sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$.

(7) Muestre que para todo sistema homogéneo $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, si A tiene más columnas que filas entonces tiene infinitas soluciones.