Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

3.1-3.2 Eliminación de Gauss y sistemas homogéneos

(1) Para cada una de las siguientes matrices ampliadas resalte sus pivotes, diga si tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución e indique cuáles son las variables libres si las hay.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$

(2) A continuación se muestra una reducción de una matriz a su forma escalonada reducida, sin embargo no se especifican sus pasos. Indique qué operación elemental entre filas se realizó de una matriz a la siguiente.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & 7 \\ -2 & -2 & -4 & -5 & -5 \end{array}\right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & -5 & -5 \end{array}\right]}_{F_2 \to \boxed{}} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{F_3 \to \boxed{}} \sim$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{F_1 \to \boxed{}} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{F_1 \to \boxed{}} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{F_1 \to \boxed{}} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{F_2 \to F_2 - \boxed{}}$$

(3) Resuelva los siguientes sistemas.

(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 2 \\ 4x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$

Rta.: $x = 2/3,\ y = 1/3,\ z = -4/3$

(b) $\begin{cases} 3x + y - z - 3w = 1 \\ x - z + 5w = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Rta.: $x = 2s + 1,\ y = 4s - 2,\ z = 7s,\ w = s$

(c) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$

Rta.: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

(d) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

Rta.: $x_1, x_3 = t,\ x_2 = -t/2,\ x_4 = -5t/2,\ x_5 = t$

(e) $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

Rta.: $x_1 = 4s,\ x_2 = t - s - 1,\ x_3 = t,\ x_4 = s$

(f) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 6x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

Rta.: no tiene solución

(4) Encuentre la recta que se forma al cortar los planos $2x - y - z = 0$, $3x - y - z = 1$, $5x + y + z = 7$.

Rta.: $x = 1,\ y = 2 - s,\ z = s$

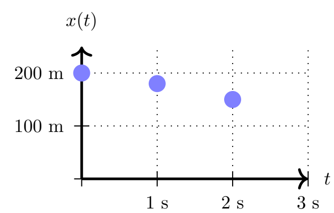
(5) Encuentre todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ que son perpendiculares a los vectores $(1,-1,1,1)$, $(2,1,-1,0)$ y $(-2,1,-1,1)$.

(6) **Ajustar datos a una curva polinomial**. En el estudio de la ciencia[1] es común emparejar datos en búsqueda de una relación matemática entre los mismos. Llegar a predecir que un dato es igual a una operación matemática entre otros datos nos permite entender mejor los comportamientos de la población.

En este ejercicio haremos una aplicación a la física con los datos obtenidos en un experimento. Este experimento corresponde al movimiento rectilineo uniformemente acelerado, abreviado en MRUA. Lanzamos un objeto hacia abajo a una cierta velocidad y medimos la posición vertical $x(t)$ en centímetros al cabo de t segundos. Los datos que tomamos fueron estos:

t	0	1	2	3	4	5
$x(t)$	200	180	150	110	60	0

Una gráfica de los tres primeros datos nos muestra el siguiente comportamiento



A golpe de vista eso parece una recta. Basado en esta primera observación

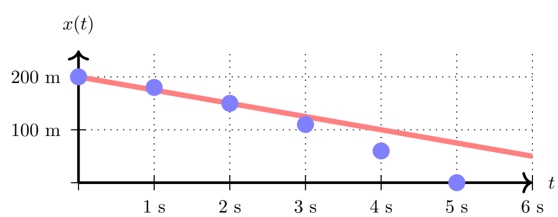
(a) Encuentre valores de m y b tales que la recta $x(t) = mt + b$ pase por los puntos $(0, 200)$ y $(2, 150)$.

Rta.: $x(t) = 200 - 25t$

(b) Basado en esta recta de una predicción de la posición final $x(t)$ al cabo de cuatro segundos y medio.

Rta.: $x(4) = 87.5$ metros

La predicción que hicimos fue basado en los datos obtenidos para los tiempos $t = 0$ y $t = 2$. La recta parece comportarse muy bien con este par de datos, pero si graficamos todos los datos disponibles vemos un problema:



Es fácil darse cuenta que una recta no sigue los puntos, pero si parece realizarlo un polinomio de segundo orden.

(c) Encuentre valores de a, b y c tales que el polinomio $x(t) = a + bt + ct^2$ pase por los puntos $(0, 200)$, $(2, 150)$ y $(3, 110)$.

Rta.: $x(t) = 200 - 15t - 5t^2$

(d) Basado en esta recta de una predicción de la posición final $x(t)$ al cabo de cuatro segundos y medio.

Rta.: $x(4) = 31.25$ metros

[1] y en particular la ciencia de datos.

Este proceso se puede generalizar a datos con comportamientos más complejos y es conocido como **regresión**. El objetivo de una regresión entre los datos x y t es encontrar una función f tal que la curva $\hat{x} = f(t)$ capture "suficientemente bien" la relación entre el dato x y el dato t. Suficientemente bien como para predecir el valor que tomaría x en valores de t que no hacen parte de la muestra inicial, con un margen de error "manejable".

También es posible relacionar un dato x con varios datos t, s, etc. En este último caso se llama **regresión multivariada**. Si la función f es lineal se le conoce como **regresión lineal multivariada**.

(7) Sean y_1, y_2 e y_3 tales que $y_1 \neq y_2$. Muestre que existe una única parábola $y = a + bx + cx^2$ que pasa por los puntos $(-1, y_1)$, $(0, y_2)$ y $(1, y_3)$.

(8) **Cuadrados mágicos.** Previamente hemos jugado con cuadrados mágicos: una cuadrícula de n columnas y n filas donde cada fila, cada columna y las dos diagonales suman la misma cantidad, esta cantidad se llama el **número mágico**. Por ejemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Todas las filas y columnas suman 15. Además sus dos diagonales suman $4 + 5 + 6 = 15$ y $8 + 5 + 2 = 15$. Entonces es un cuadrado mágico con número mágico igual a 15.

(a) Resuelva el siguiente cuadrado mágico planteando ecuaciones y teniendo en cuenta que el número mágico es 34.

16		3	
	11		8
	7	6	
4			1

(b) Muestre que en todo cuadrado mágico de 2×2 pasa que todas las casillas son el mismo número.