Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.6 Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

(1) Encuentre la recta que se describe en cada ejercicio. Escríba la forma vectorial, paramétrica y simétrica de cada recta.

(a) Pasa por el punto $A(2,1,-2)$ con dirección $\vec{\mathbf{u}} = (-1,2,2)$.

Rta.: $x = 2 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = -2 + 2t$

(b) Pasa por el punto $A(1,3,3)$ con dirección $\vec{\mathbf{u}} = (2,1,1)$.

Rta.: $x = 1 + 2t$, $y = 3 + t$, $z = 3 + t$

(c) Pasa por los puntos $A(2,1,-2)$ y $B(0,2,-3)$.

Rta.: $x = 2 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = -2 - t$

(d) Pasa por el punto $A(3,-1,-1)$ y es paralela al vector $\vec{\mathbf{u}} = (2,-1,3)$

Rta.: $x = 3 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = -1 + 3t$

(e) Pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y además la recta tiene dirección ortogonal a los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (-1,1,1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (1,1,1)$.

Rta.: $x = 1$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 - 2t$

(2) A continuación se describen ciertos planos en el espacio. Encuentre la forma vectorial y la forma normal de cada plano.

(a) Pasa por el punto $A(1,1,1)$ y los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (1,1,1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (-1,2,1)$ son paralelos al plano.

Rta.: $-x - 2y + 3z = 0$

(b) Pasa por los puntos $A(2,1,1)$ $B(-1,1,-1)$ y $C(-1,-2,-1)$.

Rta.: $-3x + 3z = -3$

(c) Pasa el punto $A(3,-1,2)$ y es perpendicular al vector $\vec{\mathbf{n}} = (1,2,-2)$.

Rta.: $x + 2y - 2z = -5$

(d) Pasa el punto $A(1,-1,1)$ y es paralelo al plano $-3x + 2y - z = 3$.

Rta.: $3x - 2y + z = 6$

(e) Pasa el punto $A(1,-1,1)$ y es perpendicular a los planos $-3x + 2y - z = 3$ y $x + y + z = 4$.

Rta.: $3x + 2y - 5z = -4$

(3) Un plano está descrito en forma normal por la ecuación $5x - y + 2z = 1$. Recuerde que el sentido de esta ecuación es que todo punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisface esta ecuación está en el plano. Encuentre lo siguiente:

(a) tres puntos distintos en el plano, **Rta.:** $A(1,2,-1)$, $B(1,8,2)$ y $C(0,-1,0)$

(b) dos vectores paralelos al plano, pero no paralelos entre sí,

Rta.: $\overrightarrow{AB} = (0,6,3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,-3,1)$

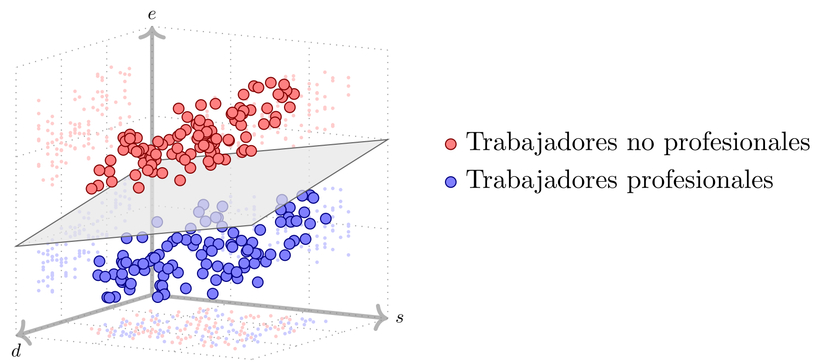
(c) una recta completamente contenida en el plano. **Rta.:** $x = 1$, $y = 2 + 6t$, $z = -1 + 3t$

(d) una recta que corte de forma ortogonal al plano y pase por el origen.

Rta.: $x = 5t$, $y = -t$, $z = 2t$

(4) **Un problema de clasificación de datos**. En la ciencia de datos el problema más común es de clasificación de poblaciones: dados un conjunto de datos pertenecientes a dos poblaciones distintas, decidir si pertenecen al grupo A o al grupo B. En este ejemplo queremos clasificar un grupo de trabajadores en profesionales y no profesionales. Por cada individuo recolectamos tres datos: d que es la distancia del trabajo a la casa; s que es el salario de la persona; e que es la edad y basado en esos tres datos queremos predecir si el trabajor tiene un título profesional o no.

Una estrategia bastante común es tomar un conjunto preliminar donde conocemos los tres datos (d, s, e) y el perfil del trabajador: es profesional o no. Con estos datos podemos construir las tripletas $(d, s, e) \in \mathbb{R}^3$ y *decidir* donde un punto deja de estar en un grupo para estar en el otro.



Por ejemplo, para los datos representados en la gráfica anterior, parece haber un espacio que separa el grupo de profesionales del grupo de no profesionales.

Esta separación se puede definir por medio de un plano $ax + by + cz = d$. De esta forma, si nos dan un nuevo dato $D = (d, s, e)$ del cual no conocemos su perfil, podemos **predecir** que no es profesional si el punto está por encima del plano, o predecir que es profesional si está por debajo del plano. Para decidir si está por encima o está por debajo se puede seguir el siguiente procedimiento:

- tomamos un punto P en el plano y un vector normal al plano $\vec{\mathbf{n}}$ con coordenada z positiva. De esta forma decimos que el vector "apunta hacia arriba",
- realizamos el producto interno entre $\overrightarrow{PD}$ y $\vec{\mathbf{n}}$,
- si el producto interno es positivo entonces el punto está arriba del plano, si es negativo está por debajo.

Un científico de datos realiza un estudio y propone el plano $x+y+6z = 36$ como aquel que separa estos dos grupos, indicando que los puntos arriba del plano corresponden a los no profesionales y aquellos debajo del plano a los profesionales. Basado en el estudio del científico queremos clasificar tres datos nuevos.

(a) Encuentre un punto P que esté sobre el plano y un vector ortogonal al plano tal que su coordenada z sea positiva.

Rta.: $P(2, 3, 5)$, $\vec{\mathbf{n}} = (1, 1, 6)$

(b) Clasifique el dato $D_1(4, 3, 7)$. **Rta.:** predecimos que no es profesional

(c) Clasifique el dato $D_2(2, 1, 3)$. **Rta.:** predecimos que es profesional

(d) Clasifique el dato $D_3(6, 6, 4)$. **Rta.:** el criterio falla

(5) La forma normal de un plano se describe por medio de la ecuación $n_1x + n_2y + n_3z = d$. El sentido de esta ecuación es que todo punto en $\mathbb{R}^3$ que la satisface hace parte del plano. Muestre que $d = 0$ si y solo si el plano contiene el origen.

(6) Muestre que la recta $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = t/2$ está completamente contenida en el plano $x - y + 2z = 3$.