Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.5 Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

(1) Dada la pareja de vectores encuentre el producto cruz que se indica.

(a) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ donde $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 2, 2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (3, 3, -1)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (-8, 1, -5)$

(b) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ donde $\vec{\mathbf{u}} = (1, -3, 2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (-1, -1, -1)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (5, -1, -4) = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$

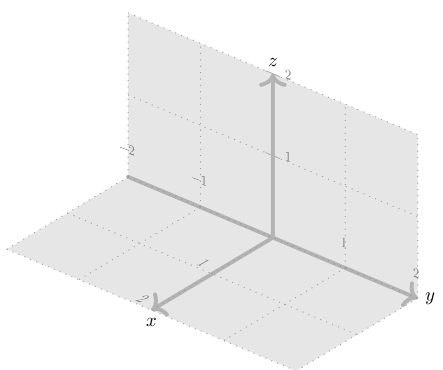
(c) $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$ donde $\vec{\mathbf{u}} = (1, -3, 2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (-1, -1, -1)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}} = (-5, 1, 4)$

(d) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ donde $\vec{\mathbf{u}} = (1/6, -3/4, -1/3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (2, -9, -4)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$

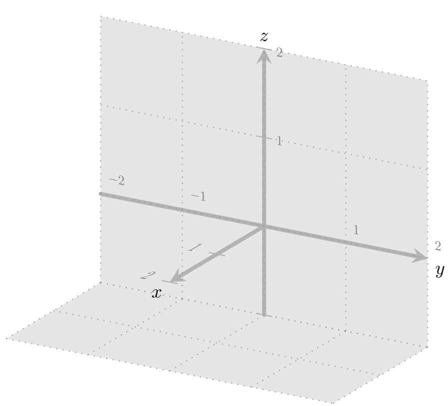
(e) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ donde $\vec{\mathbf{u}} = (\alpha, 1-\alpha, 0)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (0, \alpha, \alpha - 1)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (-(a-1)^2, a - a^2, a^2)$

(2) Para cada par de vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ en $\mathbb{R}^3$, encuentre el producto cruz $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ y dibuje los tres vectores resultantes.

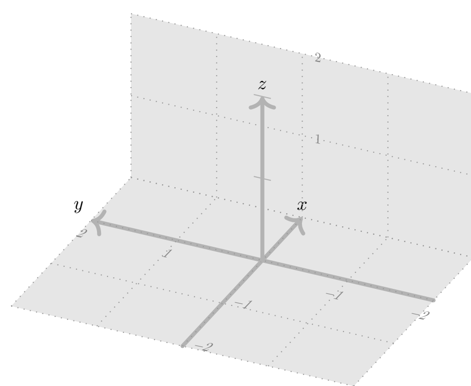
(a) $\vec{\mathbf{u}} = (1, 1, 0)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (0, 1, 1)$



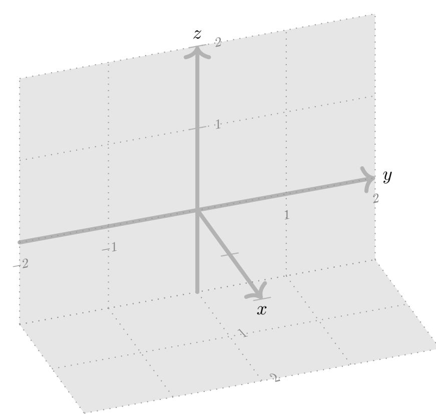
(b) $\vec{\mathbf{u}} = (0, 1, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (1, 0, 1)$



(c) $\vec{\mathbf{u}} = (1, 1, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 1, 1)$



(d) $\vec{\mathbf{u}} = (0, 1, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (1, 0, 1)$



(3) Encuentre área de la figura delimitada por los puntos dados.

(a) el paralelogramo con vértices en $A(0,0,0)$, $B(2,1,2)$, $C(-1,3,2)$ y $D(1,4,4)$. **Rta.:** $\sqrt{101}$

(b) el triángulo con vértices en $A(0,0,0)$, $B(-1,2,-2)$ y $C(1,-3,2)$. **Rta.:** $\sqrt{5}/2$

(c) el paralelogramo con vértices en $A(1,1,1)$, $B(3,2,2)$, $C(3,3,4)$ y $D(5,4,5)$. **Rta.:** $\sqrt{21}$

(d) el triángulo con vértices en $A(0,-1,2)$, $B(2,1,4)$, $C(-2,-3,3)$ y $D(0,-1,5)$. **Rta.:** $3\sqrt{2}$

(4) Encuentre el volumen de cada figura.

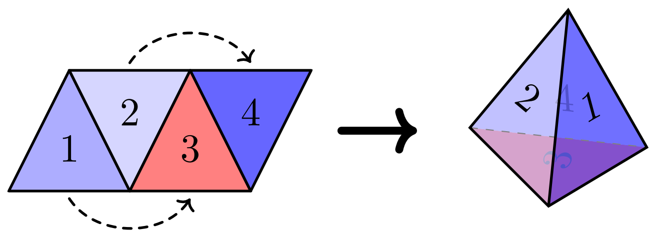
(a) del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (1, -1, 5)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, -2, 2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, 1, 1)$.

Rta.: 5

(b) del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (1, -1, 1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1, 2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 1, 1)$.

Rta.: 4

(5) Un tetraedro se forma a partir de cuatro triángulos que se unen por sus aristas, tal y como se muestra a continuación



Suponga que tenemos un tetraedro en el espacio cuyos vértices están ubicados en los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(2, 2, 0)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(2, -2, 0)$.

(a) Encuentre el área de cada una de sus cuatro caras, para así encontrar el área superficial de todo el sólido.

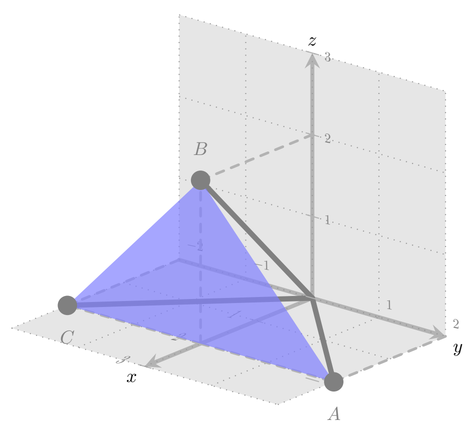
Rta.: $2\sqrt{3}$, 4,$2\sqrt{3}$, 4, área total $= 4\sqrt{3} + 8$

(b) Encuentre el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

Rta.: 16

(c) Encuentre el volumen del tetraedro.

Indicación: el volumen de un tetaedro es $V = \dfrac{hA_{\text{base}}}{3}$, donde A_{base} es el área de la base sobre la cual se apoya el sólido y h es la altura del tetraedro.



Rta.: 8/3

(6) El producto cruz satisface dos propiedades muy particulares. La primera es la fórmula de Lagrange:

Teorema (Fórmula de Lagrange). Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ en $\mathbb{R}^3$ entonces

$$\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}})\,\vec{\mathbf{v}} - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\,\vec{\mathbf{w}}.$$

La segunda es llamada la identidad de Jacobi:

Teorema (Identidad de Jacobi). Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ en $\mathbb{R}^3$ entonces

$$\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) + \vec{\mathbf{v}} \times (\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{u}}) + \vec{\mathbf{w}} \times (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}.$$

(a) Compruebe que la fórmula de Lagrange es cierta para los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 1, 1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, -1, 1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, 1, -1)$.

(b) Compruebe que la identidad de Jacobi es cierta para los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 1, 1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, -1, 1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, 1, -1)$.

(c) Usando la fórmula de Lagrange demuestre la idendidad de Jacobi.

(7) Sean $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y α un escalar. Muestre las siguientes afirmaciones.

(a) $\vec{\mathbf{u}} \times (\alpha \vec{\mathbf{v}}) = \alpha(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})$.

(b) el vector $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ es ortogonal a $\vec{\mathbf{u}}$.

(c) muestre que el producto cruz es distributivo, es decir: $\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}$.

(d) muestre que si $\vec{\mathbf{u}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$ entonces $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{0}}$.

(e) muestre que si $\vec{\mathbf{u}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$ entonces $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}} \vec{\mathbf{v}} \times \operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{u}}} \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.