Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.4 Vectores en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^n$

(1) La siguiente "operación" entre vectores está tan mal, que ni sentido tiene. Encuentre los errores y explique el porqué esta operación no tiene sentido.

Si $\vec{\mathbf{u}} = (1, -1, 2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (2, 1, 1, 0)$ queremos operar $2\vec{\mathbf{u}} - 3\vec{\mathbf{v}}$:

$$2\vec{\mathbf{u}} - 3\vec{\mathbf{v}} = 2\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2\\-1+2\\2+2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\3\\3\\0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\3\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-6\\1-3\\4-3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

(2) Para cada pareja de puntos en $\mathbb{R}^n$ encuentre un vector desde el primer hasta el segundo punto. Indique en qué espacio $\mathbb{R}^n$ está el vector.

(a) $A(-2, 3)$, $B(-3, -4)$. **Rta.:** $\overrightarrow{AB} = (-1, -7) \in \mathbb{R}^2$

(b) $P(1, 0, -1)$, $Q(-1, 2, -1)$. **Rta.:** $\overrightarrow{PQ} = (-2, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$

(c) $P(-3, 2, 1, -1)$, $Q(-2, 1, -2, 2)$. **Rta.:** $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, -3, 3) \in \mathbb{R}^4$

(d) $S(11, -3, 6, 0, 11)$, $T(8, 2, -5, -1, 10)$. **Rta.:** $\overrightarrow{ST} = (-3, -2, -11, -1, -1) \in \mathbb{R}^5$

(e) $A(1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$, $B(0, -1, -1, -1, 1, 0, 0, -1)$.
Rta.: $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -2, -1, 1, -1, -1, -2) \in \mathbb{R}^8$

(3) Encuentre el el ángulo entre los vectores dados.

(a) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 0, 1)$. **Rta.:** $\theta = \pi/2$

(b) $\vec{\mathbf{v}} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{3}/3, \sqrt{6}/6)$, $\vec{\mathbf{w}} = (1/\sqrt{2}, 0, \sqrt{3/2})$. **Rta.:** $\theta = \pi/4$

(c) $\vec{\mathbf{v}} = (1, -1, 2, 0)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 0, 2, 1)$.
Solución: recordemos que $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \|\vec{\mathbf{v}}\|\|\vec{\mathbf{w}}\| \cos\theta$ donde θ es el ángulo entre los vectores. Encontremos la norma o magnitud de cada vector

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{6}, \quad \|\vec{\mathbf{w}}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

El producto interno es

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -1 + 4 = 3.$$

Entonces

$$3 = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos\theta$$
$$\frac{3}{6} = \cos\theta$$
$$\frac{1}{2} = \cos\theta.$$

Entonces el ángulo es $\theta = \pi/3$.

(d) $\vec{\mathbf{v}} = (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}, -\sqrt{10})$, $\vec{\mathbf{w}} = (1, 3, 0)$ **Rta.:** $\theta = 5\pi/6$

(e) $\vec{\mathbf{v}} = (\sqrt{6} - 2, \sqrt{6} + 2, \sqrt{6}, \sqrt{6})$, $\vec{\mathbf{w}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)$ **Rta.:** $\theta = \pi/6$

(4) Para cada pareja de vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ encuentre vectores $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel}$ y $\vec{\mathbf{v}}^{\perp}$ tales que:

- $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}^{\parallel} + \vec{\mathbf{v}}^{\perp}$,
- $\vec{\mathbf{v}}^{\perp}$ sea perpendicular a $\vec{\mathbf{w}}$,
- $\vec{\mathbf{w}}^{\parallel}$ sea paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$.

Es decir: halle la descomposición de $\vec{\mathbf{v}}$ como la suma de un vector paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$ y un vector perpendicular a $\vec{\mathbf{w}}$.

(a) $\vec{\mathbf{v}} = (1, -1, 6)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, -2, 2)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = (-2/3, 7/3, 8/3)$, $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = (5/3, -10/3, 10/3)$

(b) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, 1, 0)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, -1, 0, 1)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = (4/3, 5/3, 1, 1/3)$, $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = 1/3(-1, 1, 0, -1)$

(c) $\vec{\mathbf{v}} = (1, -1, 1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, 1, 2)$.

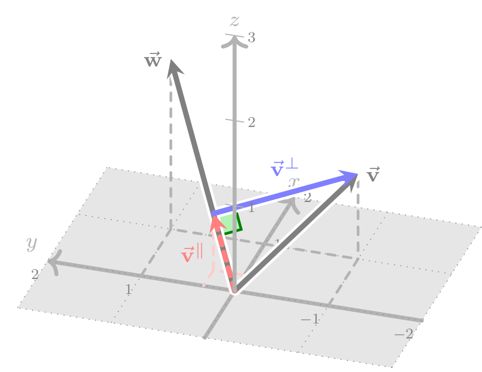
Solución: recordemos que para esta descomposición $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel}$ es la proyección ortogonal de $\vec{\mathbf{v}}$ sobre $\vec{\mathbf{w}}$:

$$\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = \operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}} \vec{\mathbf{v}} = \frac{(1,-1,1)\cdot(1,1,2)}{(1,1,2)\cdot(1,1,2)}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{2}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}.$$

Para hallar $\vec{\mathbf{v}}^{\perp}$ podemos hacer la resta entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel}$:

$$\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3\\-4/3\\1/3\end{bmatrix}.$$

A continuación está una gráfica de la situación:



(d) $\vec{\mathbf{v}} = (7, 7, 7, -7)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (-1, -2, -1, 1)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = (2, -3, 2, -2)$, $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = (5, 10, 5, -5)$

(e) $\vec{\mathbf{v}} = (2, 1, -3, 2, 2, 1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, -2, 2, 3, -1, 2)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = (2, 1, -3, 2, 2, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = \vec{\mathbf{0}}$

(5) Para cada pareja de vectores, determine si son paralelos, ortogonales o ninguno. También indique en cuál $\mathbb{R}^n$ está.

(a) $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 1, 2, 0, 1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (2, 0, 1, 2, 0)$. **Rta.:** perpendiculares, $\mathbb{R}^5$

(b) $\vec{\mathbf{u}} = (3, -4, 1, 2)$, $\vec{\mathbf{v}} = (-9, 12, -3, -6)$. **Rta.:** paralelos, $\mathbb{R}^4$

(c) $\vec{\mathbf{u}} = (1, 0, 1, -1, 1, 1, -1, 0)$, $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 0, 1, -1, -1, 1, -1, 0)$. **Rta.:** ninguno, $\mathbb{R}^8$

(6) Las pruebas que hemos realizado previamente en $\mathbb{R}^2$ se pueden extender para $\mathbb{R}^n$. Recree algunas de esas demostraciones para $\mathbb{R}^n$.

(a) Sean $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ dos vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^n$. Muestre que para todo escalar α se cumple $\|\alpha\vec{\mathbf{u}} + \alpha\vec{\mathbf{v}}\| = |\alpha|\|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|$.

(b) Sean $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}}$. Muestre que para todo escalar α se cumple que $(\alpha\vec{\mathbf{u}}) \perp \vec{\mathbf{v}}$.

(c) Suponga que $\vec{\mathbf{x}}$ es un vector tal que $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ en $\mathbb{R}^n$, entonces $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Es decir, el único vector que es ortogonal a todos los vectores al tiempo, es el vector cero.

(d) Muestre que la suma de vectores es asociativa, es decir, para todo $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ en $\mathbb{R}^n$ se cumple que $\vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}}$.