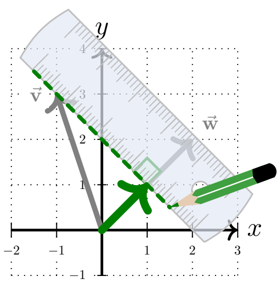
Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

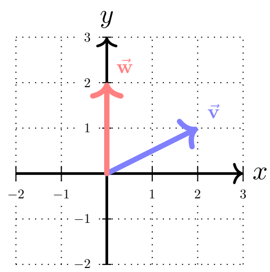
Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.3 Proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

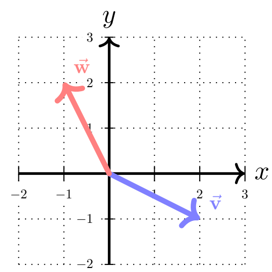
(1) En cada uno de los siguientes planos se muestran dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$. Para cada caso encuentre geométricamente la proyección de $\vec{\mathbf{v}}$ sobre $\vec{\mathbf{w}}$ usando una regla o escuadra, tal como se muestra en la primera gráfica.



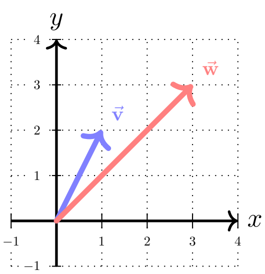
(a)



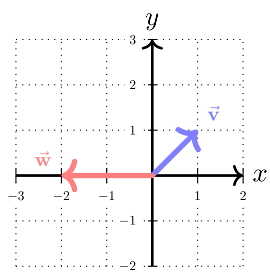
(c)



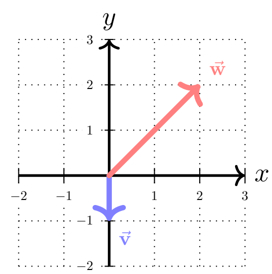
(e)



(b)



(d)



(f)

(2) En el ejercicio anterior se mostraron varios vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$, de los cuales se pedían encontrar $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{v}}$ de usando una regla. Para cada una de las gráficas encuentre la proyección algebráicamente.

(a) $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 3)$, $\vec{\mathbf{w}} = (2, 2)$.
Solución: la proyección es

$$\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{w}} = \frac{(-1,3)\cdot(2,2)}{(2,2)\cdot(2,2)}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{-2+6}{4+4}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{4}{8}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Note que esto coincide con la proyección que encontramos en el punto anterior.

(b) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2)$, $\vec{\mathbf{w}} = (3, 3)$ **Rta.:** $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{v}} = (3/2, 3/2)$

(c) $\vec{\mathbf{v}} = (0, 2)$, $\vec{\mathbf{w}} = (1, 2)$ **Rta.:** $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{v}} = (0, 1)$

(d) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-2, 0)$ **Rta.:** $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{v}} = (1, 0)$

(e) $\vec{\mathbf{v}} = (2, -1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 2)$ **Rta.:** $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{v}} = (4/5, -8/5)$

(f) $\vec{\mathbf{v}} = (0, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (2, 2)$ **Rta.:** $\operatorname{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{v}} = (-1/2, -1/2)$

(3) Para cada pareja de vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ encuentre vectores $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel}$ y $\vec{\mathbf{v}}^{\perp}$ tales que:

- $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}^{\parallel} + \vec{\mathbf{v}}^{\perp}$,
- $\vec{\mathbf{v}}^{\perp}$ sea perpendicular a $\vec{\mathbf{w}}$,
- $\vec{\mathbf{w}}^{\parallel}$ sea paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$.

Es decir: halle la descomposición de $\vec{\mathbf{v}}$ como la suma de un vector paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$ y un vector perpendicular a $\vec{\mathbf{w}}$.

(a) $\vec{\mathbf{v}} = (\sqrt{3}, 1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (2\sqrt{3}, -2)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = (\sqrt{3}/2, 3/2)$, $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = (\sqrt{3}/2, -1/2)$

(b) $\vec{\mathbf{v}} = (2, 1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 2)$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = (2, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = \vec{\mathbf{0}}$

(c) $\vec{\mathbf{v}} = (\sqrt{3}, -1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (\sqrt{3}, 1)$.

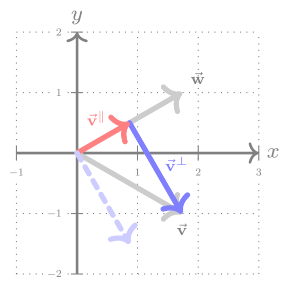
Solución: recordemos que para esta descomposición $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel}$ es la proyección perpendicular de $\vec{\mathbf{v}}$ sobre $\vec{\mathbf{w}}$. Entonces

$$\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = \mathrm{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\, \vec{\mathbf{v}} = \frac{(\sqrt{3}, -1) \cdot (\sqrt{3}, 1)}{(\sqrt{3}, 1) \cdot (\sqrt{3}, 1)} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3-1}{3+1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Para hallar $\vec{\mathbf{v}}^{\perp}$ podemos hacer la resta entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel}$:

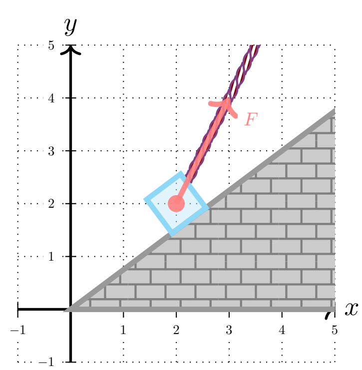
$$\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$$

A continuación está ena gráfica de la situación:



(d) $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. **Rta.:** $\vec{\mathbf{v}}^{\perp} = (-1, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}^{\parallel} = (-1, -1)$

(4) Alguien mueve una caja sobre un plano inclinado aplicando una fuerza F por medio de una cuerda, tal y como se muestra a continuación:



(a) ¿Cuánta fuerza (en magnitud) está realizando la persona sobre la caja?

Rta.: $\|F\| = \sqrt{5}$

(b) Encuentre la fuerza horizontal F_x que se está realizando. La fuerza horizontal se refiere a la cantidad de fuerza hecha en dirección al eje x positivo.

Rta.: $F_x = (1, 0)$

(c) Encuentre la fuerza vertical F_y que se está realizando. La fuerza vertical se refiere a la cantidad de fuerza hecha en dirección al eje y positivo.

Solución: debemos proyectar el vector $\vec{\mathbf{F}} = (1, 2)$ sobre un vector en dirección del eje y, en este caso tomaremos $\vec{\mathbf{w}} = (0, 1)$. La fuerza en y sería

$$F_y = \mathrm{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\, \vec{\mathbf{F}} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}\, \vec{\mathbf{w}} = \frac{(1, 2) \cdot (0, 1)}{(0, 1) \cdot (0, 1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Encuentre la fuerza que se está realizando en dirección al plano inclinado.

Rta.: $F_{\text{plano}} = (8/5, 6/5)$

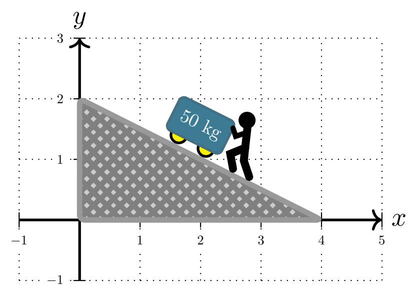
(e) Encuentre la magnitud de fuerza que se está realizando en dirección al plano inclinado.

Rta.: $\|F_{\text{plano}}\| = 2$

(f) Encuentre la fuerza que se realiza perpendicular al plano inclinado.

Rta.: $F_{\text{perpendicular}} = (-3/5, 4/5)$

(5) Un objeto de 50 kg se encuentra sobre una colina, el objeto rodaría cuesta abajo producto de la gravedad ejercida en dirección y negativa, pero una persona la sostiene de modo que no rueda y se queda en su sitio, tal y como se muestra a continuación:



(a) Encuentre el vector que representa la fuerza que ejerce la gravedad sobre el objeto. Recuerde que $F = mg$ y que $g \approx 9.8$ m/s^2.

Rta.: $\vec{\mathbf{F}} = (0, -490)$

(b) Encuentre el vector que representa la fuerza que debe ejercer la persona para que el objeto no se mueva.

Indicación: la persona debe contrarestar el desplazamiento que se hace en la dirección del piso inclinado. Encuentre la fuerza que se hace en esta dirección, la persona debe hacer una fuerza igual pero contraria.

Rta.: $\vec{\mathbf{F}}_{\text{persona}} = (-196, 98)$

(c) Encuentre la cantidad de fuerza en Newtons que debe ejercer la persona para que el objeto se quede inmóvil.

Rta.: $\|\vec{\mathbf{F}}_{\text{persona}}\| = 98\sqrt{5}$ N

(6) Demuestre las siguientes afirmaciones. Todos los vectores están en $\mathbb{R}^2$.

(a) Muestre que si $\vec{\mathbf{w}}$ es un vector distinto de cero y λ es un escalar distinto de cero, entonces $\text{Proy}_{\lambda\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{v}} = \text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{v}}$. Es decir, la proyección de un vector sobre $\vec{\mathbf{w}}$ no depende de la longitud de $\vec{\mathbf{w}}$, solo de la dirección.

(b) Muestre que si $\vec{\mathbf{w}}$ es un vector distinto de cero, entonces $\text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}) = \text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{u}}+\text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{v}}$. Es decir, la proyección de la suma, es la suma de las proyecciones.

(c) Suponga que $\vec{\mathbf{x}}$ es un vector tal que $\text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ en $\mathbb{R}^2$, entonces $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Es decir, el único vector que es ortogonal a todos los vectores al tiempo, es el vector cero.

(d) Muestre que si $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son vectores distintos a cero y $\text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ entonces $\vec{\mathbf{v}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$.

Solución: la proyección de $\vec{\mathbf{v}}$ en $\vec{\mathbf{w}}$ es $\text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{w}}$. Por hipótesis la proyección es igual a $\vec{\mathbf{v}}$, entonces

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{w}}.$$

Precisamente $\frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}$ es un escalar, llámelo λ. Luego $\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{w}}$, por lo cual son paralelos.

(e) Muestre que si $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son vectores distintos a cero y $\text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ entonces $\vec{\mathbf{v}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{w}}$.

(f) Suponga que $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son vectores distintos a cero tales que $\text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}) = \text{Proy}_{\vec{\mathbf{w}}}\,\vec{\mathbf{v}}$, entonces $\vec{\mathbf{w}}$ es ortogonal a $\vec{\mathbf{u}}$.