Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.2 Producto interno en $\mathbb{R}^2$

(1) Complete las siguientes frases

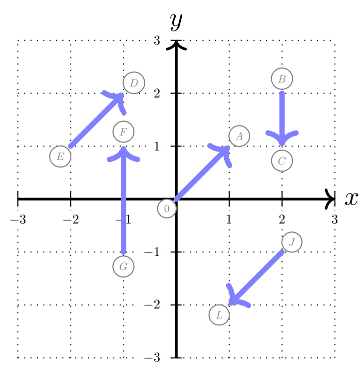
(a) Decimos que dos vectores son paralelos si el ángulo que forman es ____ o ____.

(b) Decimos que dos vectores son perpendiculares si el ángulo que forman es ____.

(c) Si dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son perpendiculares, entonces el producto interno entre ellos da como resultado ____.

(d) Acerca de la afirmación del ítem anterior, también se puede ir en la otra dirección: si el producto interno da ____ entonces son perpendiculares.

(2) En el siguiente plano se muestran muchos segmentos dirigidos. Encuentre los productos internos que se indican.



Recuerde que la notación $\overrightarrow{BC}$ se refiere al segmento de recta que parte del punto B y llega al punto C.

(a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ **Rta.:** -1

(b) $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{GF}$ **Rta.:** 2

(c) $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{AB}$

Solución: el vector $\overrightarrow{JL}$ es $\overrightarrow{JL} = (-1,-1)$, mientras que $\overrightarrow{AB} = (1,1)$. Entonces $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1,-1)\cdot(1,1) = -1-1 = -2$

(d) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ **Rta.:** 0

(e) $\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{DJ}$ **Rta.:** 9

(3) Encuentre el ángulo entre los vectores dados.

(a) $\vec{\mathbf{u}} = (\sqrt{3}, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (2\sqrt{3}, -2)$.

(b) $\vec{\mathbf{u}} = (2, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 2)$.

(c) $\vec{\mathbf{u}} = (\sqrt{3}, -1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (\sqrt{3}, 1)$.

Solución: usaremosla relación entre el producto interno y el ángulo entre vectores: $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\theta$. Si θ es el ángulo comprendido entre ellos, entonces

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3},-1)\cdot(\sqrt{3},1) &= \|(\sqrt{3},-1)\|\|(\sqrt{3},1)\|\cos\theta \\
3-1 &= \sqrt{4}\sqrt{4}\cos\theta \\
2 &= 4\cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces $\theta = \pi/3$.

(d) $\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(e) $\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 1/\alpha^2 \end{bmatrix}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1/\alpha \\ -\alpha^3 \end{bmatrix}$.

(4) Dados los siguientes vectores:

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3/2 \end{bmatrix},$$

responda si las siguientes parejas de vectores son paralelos, ortogonales o ninguna.

(a) los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$. **Rta.:** ortogonales

(b) los vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$. **Rta.:** paralelos

(c) los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{x}}$.

Solución: note que el producto interno da $(1,2)\cdot(-1,-1) = -1-2 = -3$, por lo cual no son perpendiculares. Si fueran paralalelos entonces existiría un α tal que $(1,2) = \alpha(-1,-1)$, es decir $(1,2) = (-\alpha,-\alpha)$. Esto sucede si $1 = -\alpha$ y $2 = -\alpha$, pero esto es imposible por lo cual tampoco son parelelos.

(d) los vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$. **Rta.:** ninguno

(e) los vectores $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{x}}$ y $3\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{y}}$. **Rta.:** ortogonales

(5) Encuentre el valor (o los valores) de a de modo que los vectores sean paralelos o perpendiculares, según se indique.

(a) Los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (a, 3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (5, -10)$ sean perpendiculares. **Rta.:** $a = 6$

(b) Los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (a, 4)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (5, -8)$ sean paralelos. **Rta.:** $a = -5/2$

(c) Los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (a-1, 2a)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (10, -1)$ sean perpendiculares. **Rta.:** $a = -5/4$

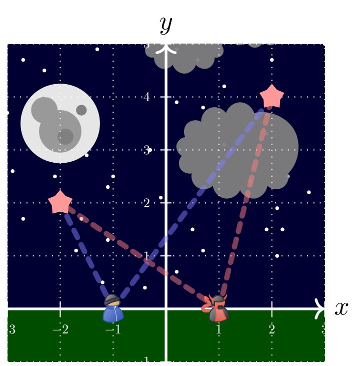
Solución: basta con encontrar un a de modo que el producto interno sea cero. El producto interno es $10(a-1)-1(2a)$, igualando a cero nos queda la ecuación $10a-10-2a = 0$, cuya solución es $a = 10/8 = 5/4$.

(d) Los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (a, 5)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (7+a, 2)$ sean perpendiculares. **Rta.:** $a = -5$, $a = -2$

(e) Los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (2, a)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (1+a, 2a)$ sean paralelos. **Rta.:** $a = 3$

(6) Encuentre el valor de α tal que el vector $\vec{\mathbf{u}} = (1, \alpha)$ forme un ángulo de $\pi/3$ con el vector $\vec{\mathbf{v}} = (\sqrt{3}, 1)$. **Rta.:** $\alpha = 1/(2\sqrt{3})$

(7) Una persona sospechosa y un diablillo observan dos estrellas rojas en el cielo.



(a) Escriba vectores que describan la posición de cada estrella, con respecto a la persona sospechosa y con respecto al diablillo.

Rta.: con respecto a la persona $(-1, 2)$ y $(3, 4)$. Al diablillo, $(-3, 2)$ y $(1, 4)$

(b) Encuentre la distancia a la cual se encuentra cada estrella del diablillo.

Rta.: $\sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$

(c) Encuentre la distancia de una estrella a la otra.

Solución: note que el la estrella de la derecha tiene por posición $(2,4)$, la estrella de la izquierda tiene posición $(-2,2)$. Entonces el vector que va desde la estrella de la izquierda a la derecha es $\vec{\mathbf{e}} = (2,4) - (-2,2) = (4,2)$. Su magnitud es $\|\vec{\mathbf{e}}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$.

(d) Encuentre la distancia a la cual se encuentra cada estrella de la persona sospechosa.

Rta.: $\sqrt{5}$ y 5

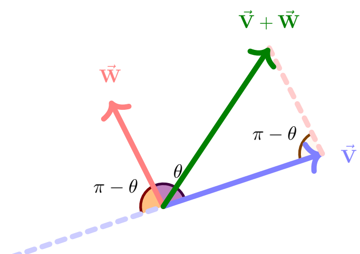
(e) Encuentre el ángulo que forman las estrellas con respecto al diablillo.

Rta.: $\arccos(5/\sqrt{13\cdot 17}) \approx 70.35°$

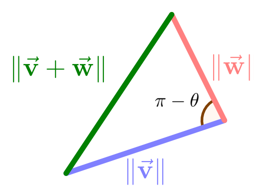
(8) A continuación está la prueba de la desigualdad del triángulo.

Si $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces $\|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|$

Demostración. Hagamos una gráfica de la situación para usar la ley de los cosenos. Llame θ el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$, entonces:



El ángulo complementario es $\pi-\theta$. Note que este ángulo es el mismo que se forma en el punto final del vector $\vec{\mathbf{v}}$. Es decir, la siguiente figura



Por la ley del coseno $\|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{v}}\|\|\vec{\mathbf{w}}\|\cos(\pi-\theta)$. Por identidades trigonométricas $\cos(\pi-\theta) = \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta = -\cos\theta$. Reemplazando, y teniendo en cuenta que el valor más alto de la función coseno es uno, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\|^2 &= \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{v}}\|\|\vec{\mathbf{w}}\|\cos\theta \\ \|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\|^2 &\leq \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{v}}\|\|\vec{\mathbf{w}}\|. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Para el lado derecho tenemos un trinomio cuadrado perfecto. Entonces:

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\|^2 &\leq (\|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|)^2 \\ \|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\| &\leq \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|. \end{aligned}$$

Basado en esta prueba, determine:

(a) ¿en qué casos se puede decir que la desigualdad de triángulo es una igualdad? Es decir, encuentre características que deben tener $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ tales que $\|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|$.

Indicación: observe la igualdad (8.1). ¿Qué debe pasar para que desaparezca el tercer término y halla igualdad?

(b) Encuentre dos vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ tales que $\|\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\| < \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|$. Es decir, encuentre un ejemplo en el cual la desigualdad sea estricta.

(c) Usando la desigualdad del triángulo, muestre que si $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son tres vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces $\|\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}\| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\| + \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|$.

Indicación: agrupe los vectores para usar la desigualdad del triángulo, luego use la desigualdad otra vez.

(9) Demuestre las siguientes afirmaciones. En estos enunciados $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son vectores en $\mathbb{R}^2$ distintos a cero.

(a) Si λ es una constante y $\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$, entonces $(\lambda\vec{\mathbf{u}}) \parallel \vec{\mathbf{v}}$.

(b) Si λ es una constante y $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}}$, entonces $(\lambda\vec{\mathbf{u}}) \perp \vec{\mathbf{v}}$.

(c) Muestre que $|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\|$.
Indicación: recuerde que $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\theta$ y que la función coseno está acotada entre menos uno y uno.

(d) Si $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{w}}$ entonces $\vec{\mathbf{u}} \perp (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}})$

(e) Si $\vec{\mathbf{u}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ al tiempo, entonces $\vec{\mathbf{v}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{w}}$.
Indicación: tenga en cuenta que son vectores en $\mathbb{R}^2$.