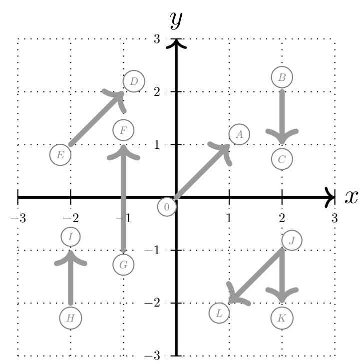
Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.1 Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$

(1) Un vector en el plano tiene dos cualidades que la caracterizan ¿cuáles son?

(2) En el siguiente plano se muestran muchos segmentos dirigidos. Determine cuáles de ellos son equivalentes entre sí.



Rta.: https://www.desmos.com/geometry/zbbpov1ayy

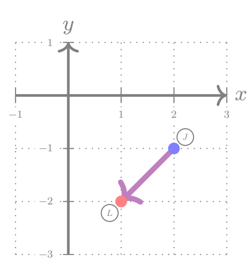
Recuerde que la notación $\overrightarrow{BC}$ se refiere al segmento de recta que parte del punto B y llega al punto C.

(3) En el punto anterior se mostró un plano con muchos puntos y segmentos dirigidos. Usando ese diagrama encuentre los siguientes vectores.

(a) $\overrightarrow{HI}$ **Rta.:** $\overrightarrow{HI} = (1, 0)$

(b) $\overrightarrow{JL}$

Solución: deseamos un vector que parte del origen (J) y llegue hasta el punto (L).



Podemos notar que esto corresponde a 1 unidades horizontales y una unidad vertical, ambas en sentido negativo. El vector sería $\overrightarrow{JL} = (-1, -1)$.

(c) $\overrightarrow{ED}$ **Rta.:** $\overrightarrow{ED} = (1, 1)$

(d) $\overrightarrow{DH}$ **Rta.:** $\overrightarrow{DH} = (-1, -4)$

(e) $\overrightarrow{BF}$ **Rta.:** $\overrightarrow{BF} = (-3, -1)$

(4) Dados los puntos $A(1, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(-2, -2)$ y $D(2, 3)$, encuentre los vectores indicados.

(a) $\overrightarrow{AB}$ **Rta.:** $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$

(b) $\overrightarrow{AD}$ **Rta.:** $\overrightarrow{AD} = (1, 4)$

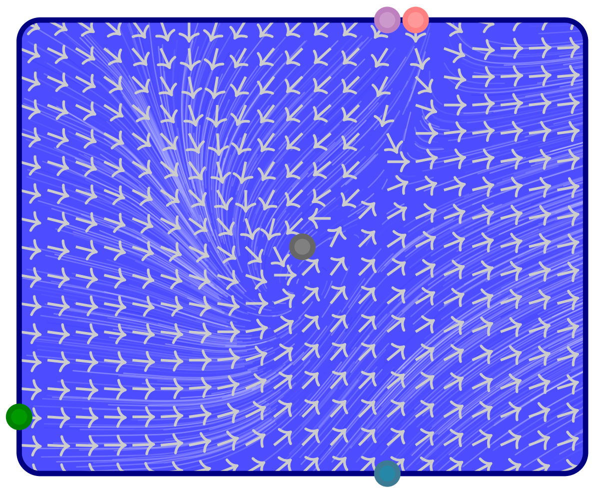
(c) $\overrightarrow{DB}$ **Rta.:** $\overrightarrow{DB} = (-4, 0)$

(d) $\overrightarrow{CA}$

Solución: el vector $\overrightarrow{CA}$ se puede calcular restando el vector C al vector A: $\overrightarrow{CA} = (1, -1) - (-2, -2) = (1 - (-1), -1 - (-2)) = (2, 1)$.

(e) $\overrightarrow{DC}$ **Rta.:** $\overrightarrow{DC} = (4, 5)$

(5) La corriente de un río se puede representar usando vectores. La idea es colocar vectores donde cada uno representará la dirección que toma el río en ese punto.



En el diagrama anterior se muestra la corriente de una porción del río Magdalena, también se observan algunos balones que fueron arrojados al río. Basado en estos vectores, trate de dibujar todo el recorrido que tendría cada balón.

(6) Encuentre la magnitud y dirección del vector descrito.

(a) El vector $\vec{\mathbf{v}} = (-\sqrt{3}, -1)$. **Rta.:** $\|\vec{\mathbf{v}}\| = 2$, $\theta = 7\pi/6$

(b) El vector $2\vec{\mathbf{w}}$ donde $\vec{\mathbf{w}} = (-3\sqrt{3}, 3)$. **Rta.:** $\|\vec{\mathbf{v}}\| = 12$, $\theta = 5\pi/6$

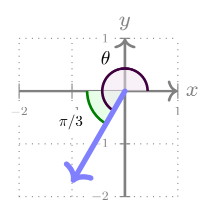
(c) El vector $-\vec{\mathbf{u}}$ donde $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 1)$. **Rta.:** $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{2}$, $\theta = 7\pi/4$

(d) El vector $\overrightarrow{PQ}$ donde $P(2, 3\sqrt{3})$ y $Q(1, 2\sqrt{3})$.

Solución: calculamos el vector $\overrightarrow{PQ}$ y luego la información que nos piden.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 2\sqrt{3}) - (2, 3\sqrt{3}) = (-1, -\sqrt{3}).$$

Entonces su magnitud es $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{1+3} = 2$. Su dirección es un ángulo que llega hasta el tercer cuadrante.



El ángulo de referencia es de $\pi/3$, entonces la dirección del vector es de $\pi + \pi/3 = 4\pi/3$.

(e) El vector $\overrightarrow{RS}$ donde $R(5, 5\sqrt{3})$ y $Q(7, 7\sqrt{3})$. **Rta.:** $\|\overrightarrow{RS}\| = 4$, $\theta = 5\pi/3$

(7) Dados los vectores

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

encuentre los siguientes vectores:

(a) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$,

(b) $2\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{w}}$, **Rta.:** $(5, -4)$

(c) $3\vec{\mathbf{w}} - (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}})$,

Solución: eliminando paréntesis nos queda la expresión $3\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}$. Reemplazamos cada vector y empezamos a operar

$$3\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} = 3\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9-(-2)+1\\6-(-1)+(-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\4\end{bmatrix}.$$

(d) $\alpha\vec{\mathbf{v}} - (1-\alpha)\vec{\mathbf{u}}$ donde α es una constante real, **Rta.:** $(-2-\alpha, 1-4\alpha)$

(e) $(2\vec{\mathbf{v}} - 3\vec{\mathbf{u}}) + (3\vec{\mathbf{u}} - 2\vec{\mathbf{w}})$. **Rta.:** $(2, -6)$

(8) Demuestre las siguientes afirmaciones. En estos enunciados $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son vectores en $\mathbb{R}^2$. Recuerde además que $\mathbf{0} = (0,0)$ es el vector cero.

(a) Muestre que para todo ángulo θ el vector $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\theta, \sin\theta)$ es unitario.

(b) Para todo escalar α, se cumple que $\|\alpha\vec{\mathbf{u}} + \alpha\vec{\mathbf{v}}\| = |\alpha|\|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|$

(c) El vector $\dfrac{\vec{\mathbf{u}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|}$ es un vector unitario.

Solución: recuerde que un vector es unitario si la norma del vector es igual a uno. Nuestra estrategia será calcular la norma del vector y mostrar que siempre es igual a uno. Mostraremos dos formas de probar este hecho.

1 Suponga que $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ entonces $\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. De esta forma

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}.$$

Dado que el denominador es un escalar, entonces al calcular su norma obtenemos

$$\|\vec{\mathbf{a}}\| = \left\|\frac{(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\|(u_1, u_2)\| = \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = 1.$$

2 Note que en la anterior prueba no era necesario indicar las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{u}}$, más bien era importante recordar que los escalares se pueden sacar de la norma poniéndolos en valor absoluto:

$$\left\|\frac{\vec{\mathbf{u}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{u}}\|}\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1.$$

(d) La suma de vectores es asociativa, es decir

$$\vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}}$$

(e) Para todo vector $\vec{\mathbf{u}}$ existe un vector $\vec{\mathbf{u}}'$ tal que $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}' = \mathbf{0}$

Solución: suponga que $\vec{\mathbf{u}} = (a, b)$ es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^2$. Entonces debemos encontrar un vector $\vec{\mathbf{u}}' = \langle a', b' \rangle$ tal que $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}' = \mathbf{0}$. Es decir

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}a+a'\\b+b'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Luego, necesitamos que $a + a' = 0$, $b + b' = 0$, es decir $a' = -a$, $b' = -b$. Entonces existe el vector $\vec{\mathbf{u}}'$, este es igual a $\vec{\mathbf{u}}' = (-a, -b)$.

El vector $\vec{\mathbf{u}}'$ es justamente $-\vec{\mathbf{u}}$.

(f) Defina los vectores $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1,0)$ y $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0,1)$. Muestre que para todo vector $\vec{\mathbf{u}}$ en $\mathbb{R}^2$, existe un par de constantes a y b tales que la $\vec{\mathbf{v}} = a\,\vec{\mathbf{e}}_1 + b\,\vec{\mathbf{e}}_2$.

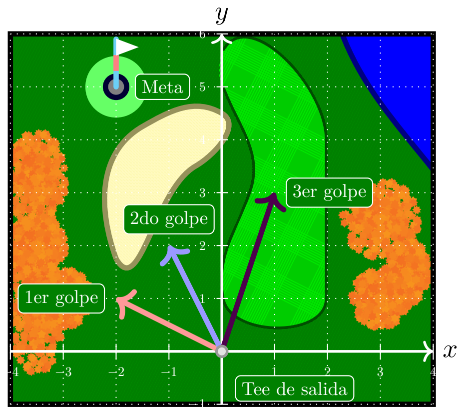
Indicación: realice algo similar al punto anterior para llegar a un sistema de ecuaciones.

(g) Muestre que no existen constantes a y b **distintas de cero** tales que $a\vec{\mathbf{u}} + b\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, donde

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}.$$

Indicación: suponga que existen tales números distintos a cero tales que $a\vec{\mathbf{u}} + b\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ y llegue a una contradicción.

(9) Un golfista se encuentra en el recorrido 6 del juego y realiza tres golpes para tratar de embocar. En el siguiente plano se muestran los golpes que realizó el golfista y la ubicación del hoyo.



(a) Diga si el golfista embocó, para esto encuentre visualmente la posición final de la pelota.

Rta.: no embocó

(b) Queremos cambiar el segundo golpe de modo que el golfista emboque la pelota. Encuentre el vector que representa este golpe.

Rta.: $(-1, 1)$