Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

1.1 Sistemas de dos ecuaciones

(1) Escriba de forma clara el teorema que determina si un sistema tiene solución única basado en los coeficientes (determinante).

(2) Describa de forma clara las tres posibles situaciones geométricas que se pueden dar en un sistema dos por dos donde no todos sus coeficientes son cero.

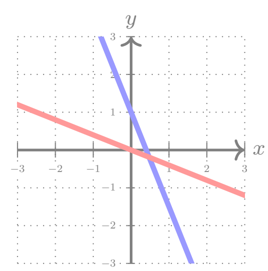
(3) Para los siguientes sistemas, determine si tiene solución única basado en los coeficientes de las variables. Realice un gráfico donde aparezcan ambas rectas.

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$ **Rta.:** única

(b) $\begin{cases} 4x - 6y = 9 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$ **Rta.:** no es única

(c) $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$ **Rta.:** única

Solución: los coeficientes del sistema son $a_{11} = 5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 2$ y $a_{22} = 5$. Dado que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 25 - 4 = 21 \neq 0$, podemos decir que el sistema tiene solución única.



(d) $\begin{cases} x/2 + y/3 = -2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ **Rta.:** no es única

(4) Para cada uno de los siguientes sistemas, encuentre el o los valores de k tal que el sistema tiene solución única.

(a) $\begin{cases} 8x + ky = 1 \\ 4x - 5y = -3 \end{cases}$ **Rta.:** $k = -8$

(b) $\begin{cases} kx + 4y = \pi \\ 9x + ky = -\pi \end{cases}$ **Rta.:** $k = \pm 6$

(c) $\begin{cases} x + 4ky = -9 \\ k^2x + y/2 = 5 \end{cases}$ **Rta.:** $k = 1/2$

(5) Para cada sistema, muestre que tiene solución única.

(a) $\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d, \end{cases}$ donde $a \neq b$.

(b) $\begin{cases} ax + by = a - b, \\ a^2x + b^2y = a + b, \end{cases}$ donde a, $b > 0$ y $a \neq b$.

Solución: los coeficientes del sistema son $a_{11} = a$, $a_{12} = b$, $a_{21} = a^2$ y $a_{22} = b^2$. El determinante es $ab^2 - a^2b = ab(b - a)$. Dado que ambos números (a y b) son positivos, y además $a \neq b$, entonces esta cantidad **nunca** es cero. Por lo cual el sistema tiene solución única.

(c) $\begin{cases} ax + (m - n)(m + n)y = \pi^2, \\ bx + (m^2 - n^2)y = \mathrm{e}^2, \end{cases}$ donde $a \neq b$ y $m \neq n$.

(6) Un cuadrado mágico de $n \times n$ es una cuadrícula de tres columnas y tres filas donde cada fila, cada columna y las dos diagonales suman la misma cantidad, esta cantidad se llama el **número mágico**. Por ejemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Todas las filas y columnas suman 15. Además sus dos diagonales suman $4 + 5 + 6 = 15$ y $8 + 5 + 2 = 15$. Entonces es un cuadrado mágico con número mágico igual a 15. A continuación se muestra un cuadrado mágico de dos por dos, al cual le faltan dos números.

3	$2a - b$
$a + 2b$	3

(a) Encuentre el número mágico del cuadrado mágico. **Rta.:** 6

(b) Determine un sistema de ecuaciones que deben cumplir las variables a y b.
Rta.: $2a - b = 3$, $a + 2b = 3$

(c) Muestre que el sistema resultante tiene solución única. **Rta.:** $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 5 \neq 0$

(d) Encuentre los valores que debe tomar a y b. **Rta.:** $a = 9/5$, $b = 3/5$

(e) Por último, reemplace los valores de a y b para descubrir cómo es el cuadrado mágico.
Rta.: todas las entradas son igual a 3

Con todo lo anterior, determine si existe un valor de a tal que la siguiente configuración sea un cuadrado mágico.

a	$5 - 2a$
$4a + 1$	$2a - 1$

Rta.: no existe

Nota: se puede demostrar que para el caso dos por dos, todo cuadrado mágico tiene la misma entrada en todas sus casillas.