Operatorhalbgruppen. Universität Bern, Frühjahrssemster 2008

Monika Winklmeier

3. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

1.1 Definition. Eine *Halbgruppe* ist ein Menge M, zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung auf M. Eine Halbgruppe mit neutralem Element heißt *Monoid* (oder *Halbgruppe mit neutralem Element*).

Beispiele.

- $(\mathbb{R}_+, +)$ mit der üblichen Addition auf $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$
- $(\mathbb{R}_+, *)$ mit $s * t := \mathrm{e}^{s+t},\ s, t \geq 0$; die Assoziativität von $*$ folgt aus der Assoziativität von $(\mathbb{R}_+, +)$.

In diesem Skript werden Halbgruppen von linearen Operatoren mit zusätzlichen Stetigkeitseigenschaften behandelt.

Es gibt zwei Zugänge: Über die Funktionalgleichung (FE) und das Anfangswertproblem ACP.

Halbgruppen für ein autonomes System

Ein physikalisches System wird durch einen Punkt in einem Phasenraum X beschrieben. Welcher Raum als Phasenraum geeignet ist, hängt von dem jeweiligen System ab. Betrachtet man einen Punkt z_0 zur Zeit t_0 in X, so wird der Zustand z_0 nach einer Zeit $t > 0$ in einen Zustand $(z_0)_t$ übergegangen sein. Hängt der neue Zustand nicht von der Startzeit t_0 oder der Vorgeschichte des Systems ab sondern nur vom Anfangswert z_0 und der Zeitdauer t, so heißt das System *autonom*. In einem autonomen System hat man also für jeden Anfangswert $z_0 \in X$ mit Anfangszeit t_0 und für alle $s, t > 0$:

$$\begin{aligned}
z_0 &:= \text{Zustand mit Anfangswert } z_0 \text{ zum Zeitpunkt } t_0\\
(z_0)_t &:= \text{Zustand mit Anfangswert } z_0 \text{ nach der Zeit } t\\
((z_0)_t)_s &:= \text{Zustand mit Anfangswert } (z_0)_t \text{ nach der Zeit } s\\
&= \text{Zustand mit Anfangswert } z_0 \text{ nach der Zeit } t + s\\
&= (z_0)_{t+s}
\end{aligned}$$

Schreibt man $U(t)z_0$ statt $(z_0)_t$, $t > 0$, so erhält man das System

$$\begin{aligned}
U(s+t)z_0 &= U(s)U(t)z_0, \qquad s,\ t > 0\\
U(0)z_0 &= z_0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Falls die Zeitentwicklung für alle $z_0 \in X$ gilt, so folgt die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}
U(s+t) &= U(s)U(t), \qquad s,\ t > 0,\\
U(0) &= \mathrm{id}\,.
\end{aligned} \tag{FE}$$

Die Menge $\{U(t) \;:\; t > 0\}$ mit der Verknüpfung aus (FE) ist also eine Halbgruppe mit neutralem Element (die Assoziativität der Verknüpfung folgt aus der Assoziativität der Addition auf $\mathbb{R}_+$).

1.2 Beispiele.

1. *Teilchen an einem Federpendel.*

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m an einem idealen Federpendel mit Federkonstante k (d. h., wir vernachlässigen beispielsweise Reibung und nehmen an, daß das Hooksche Gesetz für beliebig große Amplituden und Impulse gilt). Das System ist durch den Ort x und Impuls p des Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 eindeutig bestimmt, der Phasenraum ist also $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \text{Ort} \times \text{Impuls}$.
Ohne Einschränkung sei die Anfangszeit $t_0 = 0$. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx, \quad p = m\dot{x}, \quad t \geq 0, \qquad x(0) = x_0, \;\; p(0) = p_0,$$

oder, als System erster Ordnung,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Lösung, die mit dem Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren berechnet werden kann:

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix},$$

In diesem Fall ist also die Zeitentwicklung geben durch

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix}^n =: \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix}\right)$$

In diesem einfachen endlichdimensionalen Beispiel gilt:

- Alle Anfangswert $(x_0,\ p_0)^t$ sind zugelassen.
- Die Lösungen existieren und sind eindeutig für alle $t \geq 0$ und sind stetig für $t \searrow 0$.
- Die Lösungen hängen stetig vom Anfangswert $(x_0,\ p_0)^t$ ab.
- Auch $t < 0$ ist zugelassen.
- Das zeitliche Verhalten der Lösungen hängt von den Eigenwerten von $\begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ ab.
- Man rechnet leicht die Eigenschaften (FE) nach.

2. *Wärmeleitender Stab.*

Die Temperatur in einem idealen wärmeleitenden Stab der Länge L am Ort $x \in [0, L]$ zur Zeit $t \geq 0$ sei $f(x, t)$. Als Phasenraum kann man z. B. $X = C([0, L])$ oder $X = \mathscr{L}_p(0, L)$ wählen. Werden Randbedingungen außer Acht gelassen, so erhält man folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad t \geq 0,\ x \in [0, L], \\ f(\,\cdot\,, 0) &= \varphi_0 \in X. \end{aligned}$$

Statt obiges Anfangswertproblem als partielle Differentialgleichung in $(0, L) \times \mathbb{R}_+$ zu betrachten, kann man es auch als Problem erster Ordnung im Raum X auffassen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi &= A\varphi, \qquad t \geq 0, \\ \varphi(0) &= \varphi_0. \end{aligned} \tag{ACP}$$

Hier ist A der unbeschränkte Operator $A = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ im Raum X (um A vollständig zu definieren, muß natürlich noch der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ angegeben werden) und φ eine Abbildung $\mathbb{R}_+ \to X$ (hier $\varphi(t) = f(\,\cdot\,, t)$, $t \geq 0$).

Ist X ein Banachraum und A ein linearer Operator in X, so heißt ein Problem der Form (ACP) abstraktes Cauchyproblem (abstract Cauchy problem).

Formal ist die Lösung von (ACP) wieder "$\varphi(t) = \mathrm{e}^{tA}\,\varphi_0$". Im Gegensatz zum ersten Beispiel, bei dem der lineare Operator $\begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ beschränkt ist, ergeben sich folgende Problem:

- Wenn A unbeschränkt ist, sind in (ACP) nicht alle Anfangswerte $\varphi_0 \in X$ zugelassen, sondern nur $\varphi_0 \in \mathcal{D}(A)$.
- Falls $\varphi_0 \in \mathcal{D}(A)$, hat dann (ACP) eine Lösung $\varphi(\cdot)$?
- Wie hängt das zeitliche Verhalten der Lösungen vom Spektrum von A ab?
- Was ist unter einer Lösung von (ACP) zu verstehen?

3. *Weitere Beispiele.*

Viele weitere partielle Differentialgleichungen können so behandelt werden, beispielsweise die Schrödinger-Gleichung aus der Quantenmechanik

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathrm{i}\,\Delta\Psi + \mathrm{i}\,V\Psi$$

oder die Navier-Stokes-Gleichung in der Strömungslehre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Psi - \Delta\Psi + (\Psi\cdot\nabla)\Psi + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div}\Psi &= 0 \\ \Psi|_{t=0} &= \Psi_0. \end{aligned}$$

In diesem Skript geht es um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Problemen der Form (ACP). Das wird von den Eigenschaften des Operators A abhängen. Zentrale Sätze sind die Erzeugersätze von Hille und Yosida (Satz 2.28), von Lumer und Phillips (Satz 2.40) sowie von Stone (Satz 2.43).

1.2 Hilfsmittel aus der Operatortheorie

1.2.1 Hilbert- und Banachräume

1.3 Definition. Ein *normierter Raum* $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Vektorraum X über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zusammen mit einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, so daß

i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|, \qquad x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K},$

ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad x, y \in X,$

iii) $\|x\| = 0 \iff x = 0, \qquad x \in X.$

1.4 Definition. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine *Sesquilinearform* $(\cdot\,,\,\cdot)$ auf V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned}(\lambda u + v\,, w) &= \lambda(u\,, w) + (v\,, w), &\quad \lambda \in \mathbb{K},\ u, v, w \in V,\\ (u\,, v) &= \overline{(v\,, u)}, & u, v \in V.\end{aligned}$$

Die Sesquilinearform heißt *positiv definit*, falls $(x\,, x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$. Sie heißt *symmetrisch*, falls $(x\,, y) = \overline{(y\,, x)}$, $x,\ y \in X$.
Eine positiv definite symmetrische Sesquilinearform heißt *Skalarprodukt*.
Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt heißt *euklidischer Raum*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und *unitärer Raum*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Ein unitärer Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig*, wenn es zu jeder Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ein $x \in X$ gibt, so daß $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$.

Das Skalarprodukt im euklidischen oder unitären Raum $V, (\cdot\,,\cdot)$ induziert eine Norm auf V durch $\|x\| := (x\,, x)^{\frac{1}{2}}$, $x \in V$.
Meist schreibt man kurz X und V statt $(X, \|\cdot\|)$ und $(V, (\cdot\,,\,\cdot))$.

1.5 Definition. Ein vollständiger normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*.
Ein unitärer oder euklidischer Raum $(V, (\cdot\,,\,\cdot))$, der bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist, heißt *Hilbertraum*.

Im folgenden sind alle Hilbert- und Banachräume komplexe Räume.

1.2.2 Lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt seien immer X, Y Banachräume. Es sei $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ eine lineare Untermannigfaltigkeit von X und $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann heißt $\mathcal{D}(T)$ der *Definitionsbereich* von T. Beachte, daß $\mathcal{D}(T)$ nicht notwendigerweise abgeschlossen ist (ist $\mathcal{D}(T)$ abgeschlossen, so ist es mit der von X induzierten Norm ein Banachraum). Typischerweise wird $\mathcal{D}(T)$ in X dicht sein.
Der *Wertebereich* von T wird mit $\mathrm{rg}(T)$ bezeichnet

$$\mathrm{rg}(T) := \{T(x) : x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Der *Kern* von T ist

$$\ker(T) := \{x \in \mathcal{D}(T) : T(x) = 0\}.$$

1.6 Definition. T heißt *beschränkt*, wenn

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{D}(T),\ \|x\| = 1\} < \infty.$$

In diesem Fall heißt $\|T\|$ die *Norm* von T.

Die Menge aller linearen Operatoren mit Definitionsbereich in X und Wertebereich in Y wird mit $\mathscr{L}(X, Y)$ bezeichnet; Die Menge aller beschränkten linearen Operatoren mit Definitionsbereich in X und Wertebereich in Y wird mit $L(X, Y)$ bezeichnet. Außerdem verwendet man folgende abkürzenden Schreibweisen: $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, X)$ und $L(X) := L(X, X)$. Statt $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ schreibt man oft $T(X, Y)$ oder $T(X \to Y)$ oder, falls der Definitionsbereich mit angegeben werden soll, $(T, \mathcal{D}(T))$.

1.7 Definition. Es seien $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ und $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \to Y$ lineare Operatoren zwischen Banachräumen. Dann ist S eine *Erweiterung* von T (bzw. T eine *Einschränkung* von S), falls $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ und $Sx = Tx$, $x \in \mathcal{D}(T)$. In diesem Fall schreibt man auch $T \subseteq S$ bzw. $S \supseteq T$.

1.8 Definition. Ein linearer Operator $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ heißt *abgeschlossen*, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ gilt:

$$\exists\, x \in X,\ \exists\, y \in Y:\ x_n \to x,\ Tx_n \to y,\ n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathcal{D}(T),\ Tx = y.$$

T heißt *abschließbar*, falls es eine abgeschlossene Erweiterung hat. In dem Fall gibt es einen eindeutig bestimmten abgeschlossenen Operator, den *Abschluß* von T, bezeichnet mit $\overline{T}$, so daß gilt:

$$T \subseteq S,\ S \text{ abgeschlossen} \quad \Longrightarrow \quad \overline{T} \subseteq S.$$

Der Abschluß eines abschließbaren Operators ist also seine kleinste abgeschlossene Erweiterung.
Für einen abgeschlossenen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y gilt folgende "Grenzwertvertauschungsregel":

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T) \text{ so daß } \lim_{n\to\infty} x_n \text{ und } \lim_{n\to\infty} Tx_n \text{ existieren} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = T \lim_{n\to\infty} x_n.$$

1.9 Proposition. *Für $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ sind äquivalent:*

i) *T ist beschränkt.*

ii) *T ist stetig.*

iii) *T ist stetig in* 0.

1.10 Satz vom abgeschlossenen Graphen.
Es seien X, Y Banachräume und $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ abgeschlossen und linear. Ist $\mathcal{D}(T)$ abgeschlossen, so ist T beschränkt.

1.11 Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit. Es sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $(T_i)_i \in I$ eine Familie von linearen Operatoren von X nach Y. Gibt es zu jedem $x \in X$ ein $C_x \geq 0$ mit $\|T_i x\| \leq C_x,\ i \in I$, so gibt es ein $C \geq 0$, so daß

$$\|T_i x\| \leq C\|x\|, \qquad i \in I,\ x \in X.$$

1.12 Definition. Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(X)$ ein dicht definierter linearer abgeschlossener Operator. Definiere folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\rho(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ ist bijektiv}\} && =: \textit{Resolventenmenge} \text{ von } T,\\
\sigma(T) &:= \mathbb{C} \setminus \rho(T) && =: \textit{Spektrum} \text{ von } T,\\
\sigma_{\mathrm{p}}(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht injektiv}\} && =: \textit{Punktspektrum} \text{ von } T,\\
\sigma_{\mathrm{c}}(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht surjektiv}, \overline{\mathrm{rg}(T)} = X\} && =: \textit{kontinuierliches Spektrum} \text{ von } T,\\
\sigma_{\mathrm{r}}(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht surjektiv}, \overline{\mathrm{rg}(T)} \neq X\} && =: \textit{Restspektrum} \text{ von } T.
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. Ist X ein endlichdimensionaler Banachraum, so gilt $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T)$; im unendlichdimensionalen Fall gilt das im allgemeinen nicht.
Für $\lambda \in \rho(T)$ ist die *Resolvente*

$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}$$

nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ein beschränkter linearer Operator auf X.
Die Menge $\rho(T)$ ist offen in $\mathbb{C}$ und die *Resolventenabbildung*

$$\rho(T) \to L(X), \qquad \lambda \mapsto R(\lambda, T)$$

ist holomorph (zur Definition von Holomorphie siehe Definition 1.21).

1.13 Definition. Es sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ ein dicht definierter linearer abgeschlossener Operator. Die Menge

$$W(T) := \{(Tx\,, x) \;:\; x \in \mathcal{D}(T),\ \|x\| = 1\}$$

heißt *numerischer Wertebereich* von T.

Der numerische Wertebereich ist konvex und $\dim(\ker(T-\lambda))$ und $\mathrm{codim}(R(T-\lambda)$ sind konstant für λ in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \overline{W(T)}$.

1.2.3 Dualraum und duale Abbildung

1.14 Definition. Es sei X ein Banachraum. Dann heißt

$$X' := \{\varphi \;:\; \varphi : X \to \mathbb{C} \text{ beschränkt und linear}\}$$

der *Dualraum* von X. Mit der Norm

$$\|\varphi\|_{X'} := \sup\{|\varphi(x)| \;:\; x \in X,\ \|x\| = 1\}, \qquad \varphi \in X',$$

wird X' zu einem Banachraum. Statt $\|\varphi\|_{X'}$ schreiben wir meist kurz $\|\varphi\|$.

Jedes $x \in X$ induziert eine beschränkte lineare Abbildung

$$x'' : X' \to \mathbb{K}, \qquad x''(x') = \langle x\,, x'\rangle. \tag{1.3}$$

Man kann zeigen, daß die so definierte Abbildung $X \to X''$ eine Isometrie ist (d. h. $\|x\|_X = \|x''\|_{X''}$). Man hat also bis auf Isometrie immer $X \subseteq X''$. Gilt sogar $X \cong X''$, so heißt X *reflexiv*.
Für $\varphi \in X'$ und $x \in X$ schreiben wir statt $\varphi(x)$ oder φx oft kurz $\langle x\,, \varphi\rangle$.

Beispiele.
- $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banachraum für $p \geq 1$ und ein Hilbertraum für $p = 2$.
- $(\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n))' = \mathscr{L}_q(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Die Aussagen gelten auch für beliebige σ-endliche Maßräume (Ω, Σ, μ) statt $\mathbb{R}^n$.

1.15 Definition. Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ dicht definiert. Der zu T (*Banachraum*)-*adjungierte* Operator T' ist eine Element in $\mathscr{L}(Y', X')$, definiert durch

$$\mathcal{D}(T') := \{y' \in Y' \;:\; \exists\, x' \in X', \text{ so daß } \langle Tx\,, y'\rangle = \langle x\,, x'\rangle,\ x \in \mathcal{D}(T)\},$$
$$T'y' = x'.$$

1.16 Definition. Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ dicht definiert, so ist der zu T (*Hilbertraum*)-*adjungierte* Operator $T^* \in \mathscr{L}(H)$ wie oben definiert, wenn man $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ durch das Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ersetzt. (Beachte: $H \cong H'$ nach dem Satz von Fréchet-Riesz.)

Man kann zeigen, daß adjungierte Operatoren immer abgeschlossen sind.

1.17 Proposition. *Es sei X ein reflexiver Banachraum und $T \in \mathscr{L}(T)$ dicht definiert. Dann ist T' genau dann dicht definiert, wenn T abschließbar ist. Es gilt*

$$(T')' = \overline{T}.$$

1.18 Definition. Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ dicht definiert, so heißt

$$\begin{array}{lcl} T \textit{ selbstadjungiert} & :\Longleftrightarrow & T = T^*, \\ T \textit{ wesentlich selbstadjungiert} & :\Longleftrightarrow & \overline{T} = T^*, \\ T \textit{ symmetrisch} & :\Longleftrightarrow & T \subseteq T^*. \end{array}$$

1.2.4 Vektorwertige Folgen und Funktionen

1.19 Definition. Es seien X und Y Banachräume

i) Sind $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, so definiert man

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert} \text{ gegen } x \\ &:\Longleftrightarrow \quad x_n \to x,\ n \to \infty \ :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall\, x' \in X' \quad \langle x - x_n\,, x'\rangle \to 0,\ n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert schwach} \text{ gegen } x \\ &:\Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{w} x,\ n \to \infty \\ &:\Longleftrightarrow \quad w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \end{aligned}$$

ii) Sind $T \in L(X,Y)$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$, so definiert man

$$\begin{aligned} \|T - T_n\| \to 0,\ n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert} \text{ (in der Operatornorm) gegen } T \\ &:\Longleftrightarrow \quad T_n \to T,\ n \to \infty \ :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} T_n = T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall\, x \in X \quad Tx_n \to Tx,\ n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert stark} \text{ gegen } T \\ &:\Longleftrightarrow \quad T_n \xrightarrow{s} T,\ n \to \infty \\ &:\Longleftrightarrow \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in X \ \ \forall x' \in X' \quad \langle (T - T_n)x\,, x'\rangle \to 0,\ n \to \infty \\ &\qquad :\Longleftrightarrow \quad (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert schwach} \text{ gegen } T \\ &\qquad :\Longleftrightarrow \quad T_n \xrightarrow{w} T,\ n \to \infty \\ &\qquad :\Longleftrightarrow \quad w\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T. \end{aligned}$$

Es gilt $x_n \to x \implies x \xrightarrow{w} x$ und $T_n \to T \implies T \xrightarrow{s} T \implies T \xrightarrow{w} T$, die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

1.20 Proposition. *Es sei X ein Banachraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann stark, wenn $(\langle x_n\,, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert für $\varphi \in X'$, $\|\varphi\| \le 1$.*

Beweis. Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark. Dann folgt die Behauptung, denn

$$|\langle x_n\,, \varphi\rangle - \langle x\,, \varphi\rangle| = |\langle x_n - x\,, \varphi\rangle| \le \|x_n - x\|\,\|\varphi\|$$

Angenommen, $(\langle x_n\,, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig für $\varphi \in X'$, $\|\varphi\| \le 1$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|\langle x_n - x\,, \varphi\rangle| < \varepsilon, \qquad n \ge N,\ \varphi \in X',\ \|\varphi\| \le 1.$$

Somit folgt

$$\|x_n - x\| = \sup_{\substack{\varphi\in X' \\ \|\varphi\|\le 1}} \left|\langle x_n - x\,, \varphi\rangle\right| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Integrale

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum und $f : I \to X$ stetig. Dann kann das Integral

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

über Partialsummen definiert werden (analog zum Riemann-Integral).
Eine Verallgemeinerung ist das *Bochner-Integral*, das dem Lebesgue-Integral entspricht.

Wichtige Eigenschaften:

- Ist X ein Banachraum, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator und $f : [0,\infty) \to X$, so daß $f(s) \in \mathcal{D}(A)$, $s \geq 0$ und f und Af integrierbar sind, so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s &\in \mathcal{D}(A), \qquad t \geq 0, \\ A\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t Af(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

- Ist X ein Banachraum und $f : [0,\infty) \to X$ stetig, so folgt

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(0). \tag{1.5}$$

Beweis. Weil f stetig in 0 ist, gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\| f(0) - \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s \right\| = \left\| \frac{1}{t}\int_0^t f(0) - f(s)\mathrm{d}s \right\| &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \| f(0) - f(s) \| \,\mathrm{d}s \\ &\leq \sup\{\|f(0) - f(s)\| \,:\, s \in [0,t]\} \longrightarrow 0, \quad t \to 0. \end{aligned}$$ □

- Ist X ein Banachraum und $f : [0,\infty) \to X$ stetig differenzierbar, so folgt

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

- Ist I ein Intervall und $f : I \subseteq \mathbb{R} \to X$ eine meßbare Funktion, dann gilt:

$$f \text{ ist integrierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_I \|f(s)\|\,\mathrm{d}s < \infty.$$

Holomorphie

1.21 Definition. Es sei X ein Banachraum, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \to X$.

$$f \text{ heißt} \begin{Bmatrix} \textit{differenzierbar in } z_0 \\ \\ \textit{schwach differenzierbar in } z_0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert} \\ w\text{-}\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert} \end{Bmatrix}$$

$$f \text{ heißt} \begin{Bmatrix} \textit{holomorph in } \Omega \\ \textit{schwach holomorph in } \Omega \end{Bmatrix} \iff f \begin{Bmatrix} \textit{differenzierbar} \\ \textit{schwach diff'bar} \end{Bmatrix} \text{in jedem } z_0 \in \Omega.$$

1.22 Satz (Satz von Dunford). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, X ein Banachraum und $f : \Omega \to X$. Dann sind äquivalent:*

i) *f ist holomorph in Ω.*

ii) *f ist schwach holomorph in Ω.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) ist klar.

ii) $\Rightarrow$ i) Wähle $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so, daß die im mathematisch positiven Sinn orientiert Kreislinie $\Gamma_r := \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = r\}$ in Ω liegt. Weiter sei $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $\Omega \to X,\ z \mapsto \langle f(z), \varphi\rangle$ holomorph, also liefert Cauchys Integralsatz für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < r$:

$$\begin{aligned} \langle f(z), \varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \frac{\langle f(\xi), \varphi\rangle}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left\langle \int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi,\ \varphi \right\rangle, \\ \frac{d}{dz}\langle f(z), \varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \frac{\langle f(\xi), \varphi\rangle}{(\xi - z)^2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left\langle \int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, \mathrm{d}\xi,\ \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} I(z) &:= \left\langle \overbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}\, \mathrm{d}\xi}^{=:u(z)},\ \varphi \right\rangle \\ &= \frac{\langle f(z), \varphi\rangle - \langle f(z_0), \varphi\rangle}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \frac{\langle f(\xi), \varphi\rangle}{(\xi - z_0)^2}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \frac{\langle f(\xi), \varphi\rangle}{(\xi - z)(z - z_0)} - \frac{\langle f(\xi), \varphi\rangle}{(\xi - z_0)(z - z_0)} - \frac{\langle f(\xi), \varphi\rangle}{(\xi - z_0)^2}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \frac{\langle f(\xi), \varphi\rangle}{(\xi - z_0)^2 (\xi - z)}\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Wenn gezeigt ist, daß $\langle f(\xi), \varphi\rangle \leq C\|\varphi\|$ für ein $C \geq 0$, so folgt die Behauptung, denn dann gilt

$$|I(z)| \leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{|\langle f(\xi), \varphi\rangle|}{|\xi - z_0|^2 |\xi - z|}\, |\mathrm{d}\xi| \leq |z - z_0| \frac{C}{r^2} \longrightarrow 0, \quad z \to z_0.$$

Nach Proposition 1.20 gibt es also ein $u \in X$, so daß $u(z) \to u$ für $z \to z_0$. Falls $u \neq 0$, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\varphi_u \in X'$ mit $\|\varphi_u\| = 1$ und $\langle u, \varphi_u\rangle = 1$, im Widerspruch zu $\langle u, \varphi_u\rangle = \lim_{z \to z_0} \langle u(z), \varphi_u\rangle = 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\langle f(\xi), \varphi\rangle \leq C\|\varphi\|$. Da f schwach holomorph ist, ist es auch schwach stetig. Weil Γ_r kompakt ist, nimmt daher $\Gamma_r \to \mathbb{R},\ z \mapsto |\langle f(\cdot), \varphi\rangle|$ ein Maximum an, es gibt also $C_\varphi \geq 0$, so daß

$$|\langle f(z), \varphi\rangle| \leq C_\varphi, \qquad z \in \Gamma_r.$$

Nach (1.3) und dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es also ein $C \geq 0$, so daß

$$\|f(z)\|_X = \|f(z)\|_{X''} \leq C, \qquad z \in \Gamma_r,\ \varphi \in X,\ \|\varphi\| = 1. \qquad \square$$

Kapitel 2

Stark stetige Halbgruppen

2.1 Definition. Es sei X ein Banachraum.

i) Eine Familie $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ heißt eine *Halbgruppe* (genauer: *1-Parameter-Halbgruppe*), falls

$$\begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s), \qquad t,\ s \geq 0 \\ T(0) &= \mathrm{id}\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ii) Eine Familie $\mathcal{S} = (S(t))_{t\in\mathbb{R}} \subseteq L(X)$ heißt *Gruppe* (genauer: *1-Parameter-Gruppe*), falls

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S(t)S(s), \qquad t,\ s \in \mathbb{R} \\ S(0) &= \mathrm{id}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2 Definition. Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe auf X. Dann hat man die Abbildung

$$T : \mathbb{R}_+ \to L(X), \qquad t \mapsto T(t).$$

i) $\mathcal{T}$ heißt eine *gleichmäßig stetige Halbgruppe*, falls T stetig (bezüglich der Operatornorm) ist;
d. h., zu jedem $t_0 \geq 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\|T(t_0) - T(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ mit $|t - t_0| < \delta$.

ii) $\mathcal{T}$ heißt eine *stark stetige Halbgruppe* oder C_0*-Halbgruppe*[1], falls T stark stetig ist;
d. h., für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $\mathbb{R}_+ \to X,\ t \mapsto T(t)x$ stetig,
d. h. zu jedem $x \in X$, $t_0 \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\|T(t)x - T(t_0)x\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ mit $|t - t_0| < \delta$.

2.3 Beispiel (Translationshalbgruppe). Auf den Funktionsräumen

i) $X = \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$

ii) $X = BUC(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ :\ f \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig}\}$

iii) $X = \mathscr{L}_p(\mathbb{R})$

ist jeweils die Translation erklärt durch

$$T(t)f(\xi) = f(\xi + t), \qquad t \geq 0,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

[1] C_0 steht für Cesàro-summierbar.

In allen drei Fällen gilt offensichtlich $T(t) \in L(X),\ t \geq 0$, und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ erfüllt (2.1), ist also eine Halbgruppe auf X.
In Fall i) ist $\mathcal{T}$ nicht stark stetig, also erst recht nicht gleichmäßig stetig. Ist nämlich

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0, \\ -1, & \xi < 0, \end{cases}$$

so ist $f \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$ und $\|T(t)f - T(0)f\|_\infty = 2,\ t > 0$, also ist $T(\cdot)f$ nicht stetig in 0 (d. h. $\mathcal{T}$ ist nicht stark stetig in 0).
In den Fällen ii) und iii) ist $\mathcal{T}$ eine stark stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Halbgruppe auf X. Man kann zeigen: $\|T(t) - \mathrm{id}\| = 2$ für $t > 0$ (vgl. Aufgabe 2.1).

2.4 Proposition. *Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe auf X. Dann sind äquivalent:*

i) *T ist stark stetig.*

ii) *T ist stark stetig in* 0.

iii) *Es gibt $\delta > 0$, $M \geq 1$ und eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$, so daß*

  (a) $\|T(t)\| \leq M, \quad t \in [0, \delta]$,

  (b) $\lim_{t\searrow 0} T(t)x = x, \quad x \in D$.

Gilt iii) (*a*) *für die Halbgruppe $\mathcal{T}$, so folgt für $\omega = \frac{\log M}{\delta}$:*

$$\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t\omega}, \qquad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst (2.3): Zu jedem $t \in \mathbb{R}_+$ gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ und $\tau \in [0, \delta)$, so daß $t = \tau + n\delta$. Aus der Halbgruppeneigenschaft von $\mathcal{T}$, der Abschätzung iii)(a) und $0 < n \log M \leq \frac{t}{\delta} \log M = t\omega$ folgt

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &= \|T(\tau + n\delta)\| = \|T(\tau)\underbrace{T(\delta)\cdots T(\delta)}_{n\text{-mal}}\| \leq \|T(\tau)\|\,\|T(\delta)\|^n \leq MM^n = M\,\mathrm{e}^{n\log M} \\ &\leq M\,\mathrm{e}^{t\omega}\end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Es ist nur iii)(a) zu zeigen. Angenommen, es gibt kein $\delta > 0$ und $M \geq 1$, so daß iii)(a) gilt. Dann gibt es ein Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ mit $t_n \searrow 0$ und $\|T(t_n)\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es dann ein $x \in X$, so daß $\|T(t_n)x\| \to \infty$, $n \to \infty$. Es folgt $T(t_n)x \not\to x = T(0)x$, im Widerspruch zur starken Stetigkeit von T in 0.

iii) $\Rightarrow$ ii) Es sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \searrow 0$, $n \to \infty$; ohne Einschränkung sei $t_n \leq \delta$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $K := \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kompakt. Nach Voraussetzung ist $\|T(t_n)\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in D$ ist $T(\cdot)x|_K$ stetig. Zu beliebigem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ wähle $y \in D$, so daß $\|x - y\| < \max\{\varepsilon/3,\ \varepsilon/(3M)\}$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\|T(t_n)y - y\| < \varepsilon/3$, $n \geq N$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\|T(t_n)x - x\| &\leq \|T(t_n)(x - y)\| + \|T(t_n)y - y\| + \|y - x\| \\ &\leq \|T(t_n)\|\,\|x - y\| + \|T(t_n)y - y\| + \|y - x\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, folgt die Behauptung $\lim_{t\searrow 0} \|T(t)x - x\| = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Es seien $t_0,\ h > 0$ und $x \in X$ gegeben.
Rechtsstetigkeit von $\mathcal{T}$ in t_0: Da $\mathcal{T}$ nach Voraussetzung stark stetig in Null ist, folgt

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\|\,\|T(h)x - x\| \longrightarrow 0. \qquad h \searrow 0,$$

Linksstetigkeit von $\mathcal{T}$ in t_0: Es ist bereits in "ii) $\Rightarrow$ iii)" gezeigt, daß $\|T(t)\| \le M\,\mathrm{e}^{t\omega}$, $t \ge 0$, für geeignete $M \ge 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\|T(t_0)x - T(t_0 - h)x\| \le \underbrace{\|T(t_0 - h)\|}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\|T(h)x - x\|}_{\to 0,\ h\to 0} \longrightarrow 0, \qquad h \searrow 0.$$

i) $\Rightarrow$ ii) klar. ◻

2.5 Definition. Eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge0}$ auf einem Banachraum X heißt

i) *beschränkt*, falls in (2.3) $\omega = 0$ gewählt werden kann;

ii) *kontraktiv* bzw. eine *Kontraktionshalbgruppe*, falls in (2.3) $\omega = 0$ und $M = 1$ gewählt werden kann;

iii) *isometrisch*, falls in $\|T(t)\| = 1$, $t \ge 0$.

2.6 Definition. Es sei $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banachraum X. Dann heißt

$$\omega_0 = \omega_0(\mathcal{T}) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} \,:\, \text{es gibt ein } M \ge 1 \text{ so daß } \|T(t)\| \le M\,\mathrm{e}^{t\omega},\ t \ge 0\} \tag{2.4}$$

die *Wachstumsschranke* oder der *Typ* von $\mathcal{T}$ (*growth bound* oder *type* of $\mathcal{T}$).

2.7 Bemerkungen.

- Auch $\omega_0 = -\infty$ kann vorkommen: Es sei $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge0}$ eine beliebige nilpotente Halbgruppe (d. h. $T(t) = 0$ für t groß genug), z. B. $X = \mathscr{L}_p(0, a)$ für ein $a \in (0, \infty)$ und

$$(T(t)f)(\xi) := \begin{cases} f(t-\xi), & t \le \xi \le a, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad f \in X.$$

  Offensichtlich ist $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge0}$ eine Halbgruppe auf X und $\omega_0(\mathcal{T}) = -\infty$.

- Das Infimum in (2.4) wird nicht notwendigerweise angenommen.

- Möglicherweise muß in (2.4) $M > 1$ geählt werden, unabhängig davon, wie groß ω gewählt wird.

2.1 Gleichmäßig stetige Halbgruppen

2.8 Definition. Es sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Setze

$$\exp(tA) := \mathrm{e}^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Dann heißt die Familie $(\exp(tA))_{t\ge0}$ die *von A erzeugte Gruppe*, und $(\exp(tA))_{t\in\mathbb{R}}$ die *von A erzeugte Halbgruppe*,

Daß Definition 2.8 sinnvoll ist, zeigt folgende Proposition:

2.9 Proposition. *Es sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$.*

i) $\exp(tA)$ *konvergiert absolut und* $\exp(tA) \in L(X)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

ii) $\exp(0 \cdot A) = \mathrm{id}$.

iii) $\exp((t+s)A) = \exp(tA)\,\exp(sA)$, $s, t \ge 0$.

iv) $\mathbb{R} \to L(X),\ t \mapsto \exp(tA)$ *ist stetig.*

v) *Ist* $S \in L(X)$*, so daß auch* S^{-1} *existiert und* $S^{-1} \in L(X)$*, so gilt*

$$\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)\,S. \tag{2.6}$$

vi) *Ist* $B \in L(X)$ *mit* $AB = BA$*, so gilt*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A). \tag{2.7}$$

Aus i)–iv) folgt, daß $(\exp(tA))_{t\geq 0}$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe ist.

Beweis. i) Für $k < m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| \sum_{n=0}^{m} \frac{t^n}{n!} A^n - \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{m} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^{m} \frac{t^n}{n!} \|A^n\| \longrightarrow 0, \qquad k, m \to \infty,$$

weil $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n = e^{t\|A\|}$. Also folgt, daß die Folge $\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} A^n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(X)$ ist, also in $L(X)$ konvergiert (da $L(X)$ ein Banachraum ist).
ii) ist klar.
iii) folgt aus vi).
iv) Für $t, h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\big\|\exp((t+h)A) - \exp(tA)\big\| &\leq \big\|\exp(tA)\big\|\,\big\|\exp((hA) - \mathrm{id}\big\| = \big\|\exp(tA)\big\|\,\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A^n \right\| \\ &\leq \big\|\exp(tA)\big\|\,|h|\,\|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+1)!} \|A^n\| \leq |h|\,\|A\|\,\big\|\exp(tA)\big\|\,\big\|\exp(h\|A\|)\big\|.\end{aligned}$$

Also folgt $\exp((t+h)A) \longrightarrow \exp(tA)$ für $h \to 0$.
v) Da die Reihen absolut konvergieren, gilt

$$\exp(S^{-1}AS) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (S^{-1}AS)^n = S^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\right)S = S^{-1}\exp(A)S.$$

vi) Da die Reihen absolut konvergieren, gilt mit Cauchys Produktformel

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \exp(A+B). \qquad \square\end{aligned}$$

2.10 Beispiel (Matrixhalbgruppen). Ist $X = \mathbb{C}^n$ und $A \in L(X) = M_n(\mathbb{C})$, so liefert Proposition 2.9 ein Verfahren zur Berechnung von Matrixexponentialfunktionen: Es gibt ein $S \in Gl(n, \mathbb{C})$, so daß SAS^{-1} Jordannormalform hat, d. h., $A = S^{-1}(D+N)S$ mit einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N, so daß $ND = DN$. Also ist

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp(S^{-1}(tD+tN)S) = S^{-1}\exp(tD+tN)S = S^{-1}\exp(tD)\exp(tN)S \\ &= S^{-1}\exp(tD)\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} N^n}_{\substack{\text{nur endlich viele}\\ \text{Summanden!}}}\Big)S.\end{aligned}$$

Für konkrete Rechnungen benutzt man noch: Hat A Blockdiagonalgestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_j \end{pmatrix} =: \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_n)$$

mit $A_k \in M(n_k, \mathbb{C})$, $n_k \in \mathbb{N}$, mit $\sum_{k=1}^{j} n_k = n$, so ist

$$\exp(tA) = \operatorname{diag}\big(\exp(tA_1), \ldots, \exp(tA_n)\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Speziell für ein Jordankästchen der Länge m

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

findet man

$$\exp(tJ) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Das asymptotische Verhalten von $\exp(tA)x$ hängt also von der Jordanstruktur von A ab.

Beispiel. Es sei $m > 0$, $k \in \mathbb{R}$ und $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (vgl. Beispiel 1.2.1). Wähle $\kappa \in \mathbb{C}$, so daß $\kappa^2 = -k$ und setze $S := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} \kappa & \sqrt{m}^{-1} \\ -\sqrt{m} & \kappa^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist

$$SAS^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa & \sqrt{m}^{-1} \\ -\sqrt{m} & \kappa^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa^{-1} & -\sqrt{m}^{-1} \\ \sqrt{m} & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{m} \end{pmatrix}.$$

Aus physikalischen Überlegungen folgt, daß $k \geq 0$ ist, also ist $\kappa \in i\mathbb{R}$. Die Lösungen $\exp(tA)\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ p_0 \end{smallmatrix}\right)$ sind daher periodisch mit Periode $\omega = \frac{2\pi m}{|\kappa|}$, denn

$$\begin{aligned} \exp\big((t+\omega)A\big) &= S^{-1} \exp\left((t+\omega)\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{m} \end{pmatrix}\right) S \\ &= S^{-1} \begin{pmatrix} \exp\left((t+\omega)\frac{\kappa}{m}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-(t+\omega)\frac{\kappa}{m}\right) \end{pmatrix} S = S^{-1} \begin{pmatrix} \exp(t\frac{\kappa}{m}) & 0 \\ 0 & \exp(-t\frac{\kappa}{m}) \end{pmatrix} S \\ &= \exp(tA). \end{aligned}$$

Bisher haben wir die Funktionalgleichung (FE) betrachtet. Aus Proposition 2.9 wissen wir, daß für $A \in L(X)$ die Gruppe $(\exp(tA))_{t\in\mathbb{R}}$ stetig ist. Die folgende Proposition zeigt, daß sie sogar differenzierbar ist.

2.11 Proposition. *Es sei X ein Banachraum, $A \in L(X)$ und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ die von A erzeugte Halbgruppe* (*d. h.*, $T(t) = \exp(tA)$, $t \geq 0$). *Dann gilt:*

i) *Die Abbildung* $\mathbb{R} \to L(X),\ t \mapsto T(t)$, *ist differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ii) *Ist* $S : \mathbb{R} \to L(X)$ *eine Lösung von*

$$U(0) = \mathrm{id}, \qquad \frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

so ist $S = T$.

Beweis. i) Wegen

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = T(t)\,\frac{T(h) - \mathrm{id}}{h} = \frac{T(h) - \mathrm{id}}{h}\,T(t), \quad t \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

genügt es, die Differenzierbarkeit in $t = 0$ mit $\frac{d}{dt}T(0) = A$ zu zeigen. Das folgt aus

$$\left\| \frac{1}{h}(T(h) - T(0)) - A \right\| = \left\| \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}A^n - A \right\| = \left\| \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^n}{n!}A^n \right\| \le |h|\,\|A\|^2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n\|A\|^n}{(n+2)!}$$

$$\le |h|\,\|A\|^2 \exp(h\,\|A\|) \longrightarrow 0, \qquad |h| \to 0.$$

ii) Nach Voraussetzung gilt $T(0) = S(0)$. Es sei nun $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T(t)S(t_0 - t)) &= \left(\frac{d}{dt}T(t)\right)S(t_0 - t) + T(t)\left(\frac{d}{dt}S(t_0 - t)\right)\\ &= AT(t)S(t_0 - t) - \underbrace{T(t)A}_{=AT(t)}S(t_0 - t) = 0.\end{aligned}$$

Angenommen, $T(t)S(t_0 - t)$ ist nicht konstant in t. Dann gibt es $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in X$ und $\varphi \in X'$, so daß $\langle (T(\tau)S(t_0 - \tau)x, \varphi\rangle \neq \langle (T(0)S(t_0)x, \varphi\rangle$. Für beliebiges $x \in X$, $\varphi \in X'$ ist aber nach obiger Rechnung $\frac{d}{dt}\langle (T(t)S(t_0 - t))x, \varphi\rangle = 0$, $t \in \mathbb{R}$, also ist $\langle (T(t)S(t_0 - t))x, \varphi\rangle$ konstant in t. Folglich ist auch $T(t)S(t_0 - t)$ konstant in t und daher

$$T(t_0) = T(t_0)S(t_0 - t_0) = T(0)S(t_0 - 0) = S(t_0).$$

Da $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

2.12 Korollar. *Ist* X *ein Banachraum,* $x_0 \in X$, $A \in L(X)$ *und* $(T(t))_{t\ge 0}$ *die von* A *erzeugte Gruppe, so ist* $T(\cdot)x_0$ *die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$x(0) = x_0, \qquad \frac{d}{dt}x = Ax, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2.13 Satz (Charakterisierung von gleichmäßig stetigen Halbgruppen). *Es sei* X *ein Banachraum und* $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge 0}$ *eine Halbgruppe auf* X. *Dann ist* $\mathcal{T}$ *genau dann eine gleichmäßig stetige Halbgruppe auf* X, *falls es ein* $A \in L(X)$ *gibt, so daß* $T(t) = \exp(tA)$, $t \ge 0$. *Der Operator* A *ist durch* $\mathcal{T}$ *eindeutig bestimmt;* T *ist differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A, \qquad t \ge 0. \tag{2.9}$$

Beweis. Ist $A \in L(X)$, so ist $(\exp(tA))_{t\ge 0}$ nach Proposition 2.9 eine gleichmäßig stetige Halbgruppe und erfüllt (2.9) nach Proposition 2.11.

Es sei nun eine gleichmäßig stetige Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ auf X gegeben. Setze

$$V(t) \; := \; \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

Da T stetig ist, folgt aus (1.5), daß

$$\frac{1}{t}V(t) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s \;\longrightarrow\; T(0) = \mathrm{id}, \qquad t \searrow 0.$$

Also gibt es ein t_0, so daß $V(t)$ beschränkt invertierbar ist für alle $t \in (0, t_0]$. V ist stetig differenzierbar ist, denn für $h > 0$ ist

$$\frac{1}{h}\,(V(t+h) - V(t)) \;=\; \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\,\mathrm{d}s \;=\; T(t)\,\frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,\mathrm{d}s \;\longrightarrow\; T(t), \qquad h \searrow 0,$$

$$\frac{1}{h}\,(V(t-h) - V(t)) \;=\; \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} T(s)\,\mathrm{d}s \;=\; T(t-h)\,\frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,\mathrm{d}s \;\longrightarrow\; T(t), \qquad h \searrow 0.$$

Die Differenzierbarkeit von T folgt aus

$$\begin{aligned} T(t) \;&=\; V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t) \;=\; V(t_0)^{-1}\int_0^{t_0} T(s+t)\,\mathrm{d}s \;=\; V(t_0)^{-1}\int_t^{t+t_0} T(s)\,\mathrm{d}s \\ &=\; V(t_0)^{-1}\,(V(t+t_0) - V(t))\,, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

da V differenzierbar ist. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,T(t) \;&=\; V(t_0)^{-1}\frac{d}{dt}\,(V(t+t_0) - V(t)) \;=\; V(t_0)^{-1}\,(T(t+t_0) - T(t)) \\ &=\; V(t_0)^{-1}\,(T(t_0) - \mathrm{id})\,T(t) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $A \;:=\; V(t_0)^{-1}\,(T(t_0) - \mathrm{id})$ linear und beschränkt. Aus Proposition 2.11 folgt, daß $T(t) = \exp(tA)$, $t \geq 0$. □

2.14 Definition. Sind A und $\mathcal{T}$ wie in Satz 2.13, so heißt A der (*infinitesimale*) *Erzeuger* von $\mathcal{T}$.

Für eine Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ und ihren Erzeuger A gilt also:

$$Ax \;=\; \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\,(T(t) - \mathrm{id})\,x, \qquad x \in X, \tag{2.10}$$

$$T(t)x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n x, \qquad x \in X,\; t \geq 0. \tag{2.11}$$

Beispiel (Multiplikationshalbgruppen auf $\mathbf{C_0(\Omega)}$).

2.15 Definition. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $q \in C(\Omega)$. Dann heißt M_q, definiert durch

$$M_q f := qf, \qquad f \in \mathcal{D}(M_q) := \{f \in C_0(\Omega) \;:\; qf \in C_0(\Omega)\},$$

der *von q induzierte Multiplikationsoperator* auf

$$C_0(\Omega) := \{f \in C(\Omega) \;:\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K_\varepsilon \subseteq \Omega \text{ kompakt, so daß } |f(\xi)| < \varepsilon,\; \xi \in \Omega \setminus K_\varepsilon\},$$

versehen mit der Norm $\|f\| = \sup\{|f(\xi)| \;:\; \xi \in \Omega\}$.

2.16 Proposition. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $q \in C(\Omega)$. Dann gilt:*

i) $M_q : \mathcal{D}(M_q) \subseteq C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$ *ist dicht definiert und abgeschlossen.*

ii) M_q *ist beschränkt* $\iff$ q *ist beschränkt.*

iii) M_q *ist beschränkt invertierbar* $\iff$ q *ist beschränkt invertierbar, in diesem Fall ist* $(M_q)^{-1} = M_{q^{-1}}$.

iv) $\sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}$.

Beweis. Siehe z. B. [EN00, Proposition I.4.2]. □

2.17 Definition. Es sei nun $q \in C(\Omega)$ mit $\omega := \sup \operatorname{Re}(q(\xi)) < \infty$. Dann definiere $\widetilde{q}_t(\xi) := \mathrm{e}^{tq(\xi)},\ t \geq 0,\ \xi \in \Omega$, und

$$T_q(t) := M_{\widetilde{q}_t}, \qquad t \geq 0.$$

Offensichtlich ist $\widetilde{q}_t \in C(\Omega),\ t \geq 0$, und daher ist jedes $T_q(t)$ ein Multiplikationsoperator auf $C_0(\Omega)$. Klar ist auch, daß $\mathcal{T}_q = (T_q(t))_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe auf $C_0(\Omega)$ ist, denn für alle $f \in C_0(\Omega)$, $s, t \geq 0$ und $\xi \in \Omega$ ist

$$(T_q(s)T_q(t)f)(\xi) = \mathrm{e}^{tq(\xi)}(T_q(s)f)(\xi) = \mathrm{e}^{sq(\xi)}\,\mathrm{e}^{tq(\xi)}\, f(\xi) = \mathrm{e}^{(s+t)q(\xi)}\, f(\xi) = (T_q(s+t)f)(\xi),$$

und

$$\|T_q(t)\| \leq \mathrm{e}^{t\omega}, \qquad t \geq 0.$$

Gibt es hinreichende und notwendige Bedingungen an q, so daß $\mathcal{T}_q$ eine gleichmäßig stetige oder eine stark stetige Halbgruppe ist? Wenn $\mathcal{T}_q$ gleichmäßig stetig ist, was ist dann der Erzeuger?

2.18 Proposition. *Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.17 gilt:*

i) $\mathcal{T}_q$ *ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn q beschränkt ist. In diesem Fall ist M_q der Erzeuger von $\mathcal{T}_q$.*

ii) *Ist q unbeschränkt (aber weiterhin* $\sup\{\operatorname{Re}(q(\xi)) : \xi \in \Omega\} < \infty$*), so ist $\mathcal{T}_q$ eine stark stetige Halbgruppe auf $C_0(\Omega)$.*

Beweis. i) Angenommen, q ist beschränkt. Dann ist auch M_q beschränkt und es gilt für alle $t \geq 0$, $f \in C_0(\Omega)$ und $\xi \in \Omega$:

$$\begin{aligned}(T_q(t)f)(\xi) &= \mathrm{e}^{tq(\xi)}\, f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q(\xi)^n}{n!} f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(M_{q^n} f)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}((M_q)^n f)(\xi) \\ &= \Big(\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(M_q)^n\Big) f\Big)(\xi) = (\exp(tM_q)f)(\xi).\end{aligned}$$

Also ist $T_q(t) = \exp(tM_q)$, $t \geq 0$, und daher $\mathcal{T}_q$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe nach Satz 2.13.

Angenommen, q ist unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(\xi_n) \subseteq \Omega$, so daß $|q(\xi_n)| \to \infty$. Setze $t_n := \frac{1}{|q(\xi_n)|},\ n \in \mathbb{N}$. Wäre $\mathcal{T}_q$ gleichmäßig stetig, so gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\|T(t_n)f - f\| < \varepsilon,\ n \geq N,\ f \in C_0(\Omega)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle eine Funktion $f_n \in C_0(\Omega)$, so daß $f_n(\xi_n) = 1$ und $\|f_n\| = 1$. Setze $\delta := \max\{|\,\mathrm{e}^z - 1|\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\} > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|T(t_n)f_n - f_n\| &= \sup\{|\,\mathrm{e}^{t_n q(\xi)}\, f_n(\xi) - f_n(\xi)| : \xi \in \Omega\} \geq |\,\mathrm{e}^{t_n q(\xi_n)}\, f_n(\xi_n) - f_n(\xi_n)| \\ &= |\,\mathrm{e}^{t_n q(\xi_n)} - 1|\,|f_n(\xi_n)| = |\,\mathrm{e}^{t_n q(\xi_n)} - 1| \geq \delta,\end{aligned}$$

also ist $\mathcal{T}_q$ nicht gleichmäßig stetig.

ii) Es sei $f \in C_0(\Omega)$. Es ist zu zeigen, daß $\mathbb{R}_+ \to X,\ t \mapsto T_q(t)f$ stetig ist. Nach Proposition 2.4 genügt es, die Stetigkeit in 0 zu zeigen.
Wähle $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein Kompaktum $K_\varepsilon \subset \Omega$, so daß

$$|f(\xi)| < \frac{\varepsilon \|f\|}{e^{|\omega|}+1}, \qquad \xi \in \Omega \setminus K_\varepsilon,$$

mit $\omega = \sup\{\mathrm{Re}(q(\xi)) : \xi \in \Omega\}$. Da $\exp(\cdot)$ auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig, K_ε kompakt und q stetig ist, gibt es ein $t_0 \in (0,1)$, so daß

$$\left|1 - \exp(tq(\xi))\right| < \varepsilon, \qquad t \in [0, t_0],\ \xi \in K_\varepsilon.$$

Damit folgt für $t \in [0, t_0]$:

$$\begin{aligned}
\|T(t)f - f\| &= \sup\{|\,e^{tq(\xi)} f(\xi) - f(\xi)| : \xi \in \Omega\} \\
&= \sup\{|(e^{tq(\xi)} - 1) f(\xi)| : \xi \in K_\varepsilon\} + \sup\{|(e^{tq(\xi)} - 1) f(\xi)| : \xi \in \Omega \setminus K_\varepsilon\} \\
&\le \|f\| \sup\{|\,e^{tq(\xi)} - 1| : \xi \in K_\varepsilon\} + \frac{\varepsilon \|f\|}{e^{|\omega|}+1} \sup\{|\,e^{tq(\xi)} - 1| : \xi \in \Omega \setminus K_\varepsilon\} \\
&< \varepsilon \|f\| + \varepsilon \|f\| = 2\varepsilon \|f\|.
\end{aligned}$$

□

2.2 Erzeuger stark stetiger Halbgruppen

In Kapitel 2.1 ist gezeigt worden: Ist $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge 0}$ eine Halbgruppe auf einem Banachraum X, dann

$$\mathcal{T} \text{ gleichmäßig stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt ein } A \in L(X), \text{ so daß } T(t) = \exp(tA),\ t \ge 0.$$

Außerdem ist T differenzierbar und $\frac{d}{dt}T(0) = A$.
Wir benutzen nun die letztgenannte Eigenschaft, um auch einer nur stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}$ einen eindeutig bestimmten Erzeuger A zuzuordnen.

2.19 Definition. Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X. Der Operator A, definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A) &:= \Big\{ x \in X : \lim_{h \searrow 0} \tfrac{1}{h}(T(h)x - x) \text{ existiert} \Big\}, \\
Ax &:= \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(T(h)x - x), \qquad x \in \mathcal{D}(A),
\end{aligned}$$

heißt der (*infinitesimale*) *Erzeuger von* $\mathcal{T}$.

Bemerkung. Ist $\mathcal{T}$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe, so stimmt diese Definition mit der Definition des Erzeugers in Definition 2.14 überein.

2.20 Lemma. *Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X. Für $x \in X$ definiere die Abbildung $\tau_x : \mathbb{R}_+ \to X,\ t \mapsto \tau_x(t) = T(t)x$. Dann sind äquivalent:*

i) *τ_x ist differenzierbar.*

ii) *τ_x ist differenzierbar in* 0.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) ist klar.

ii) $\Rightarrow$ i) Es seien $t_0 > 0$, $h \in (0, t_0)$ und $x \in X$, so daß τ_x in 0 differenzierbar ist. Die Rechtsdifferenzierbarkeit von τ_x in t_0 folgt aus

$$\frac{1}{h}\left(\tau_x(t_0+h) - \tau_x(t_0)\right) = T(t_0)\,\frac{1}{h}\left(\tau_x(h) - \tau_x(0)\right) \longrightarrow T(t_0)\frac{d}{dt}\tau_x(0), \qquad h \to 0.$$

Die Linksdifferenzierbarkeit von τ_x in t_0 folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\tau_x(t_0) - \tau_x(t_0-h)\right) &= T(t_0-h)\Big(\frac{1}{h}\left(\tau_x(h) - \tau_x(0)\right) - \frac{d}{dt}\tau_x(0)\Big) + T(t_0-h)\frac{d}{dt}\tau_x(0)\\ &\longrightarrow T(t_0)\frac{d}{dt}\tau_x(0), \qquad h \to 0,\end{aligned}$$

denn der erste Summand konvergiert gegen 0 (da $T(t_0-h)$ für $h \in (0, t_0)$ beschränkt ist und der Term in Klammern nach Voraussetzung gegen 0 strebt). $\square$

2.21 Korollar. *Ist $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Erzeuger A, so ist*

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X \;:\; t \mapsto T(t)x \;\text{ ist differenzierbar}\}.$$

2.22 Proposition. *Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A.*

i) $A \in \mathscr{L}(X)$,

ii) *Ist $x \in \mathcal{D}(A)$, so ist $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$, die Abbildung $\tau_x : \mathbb{R}_+ \to X$, $t \mapsto T(t)x$ ist differenzierbar und*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \qquad t \geq 0.$$

iii) *Ist $t \geq 0$ und $x \in X$, so ist $\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A)$.*

iv) *Ist $t \geq 0$, so ist*

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s, \qquad x \in X, \tag{2.12}$$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s, \qquad x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.13}$$

Beweis. i) ist klar.
ii) Ist $x \in \mathcal{D}(A)$, so ist ist τ_x differenzierbar mit $\frac{d}{dt}\tau_x(0) = Ax$ und es gilt $\frac{d}{dt}T(t)x = \frac{d}{dt}\tau_x(t) = T(t)\frac{d}{dt}\tau(0) = T(t)Ax$. Also existiert auch

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\Big(T(h)T(t)x - T(t)x\Big) = \lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\Big(T(t+h)x - T(t)x\Big) = T(t)Ax,$$

und daher $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ und $AT(t)x = T(t)Ax$.
iii) und (2.12): Es seien $t \geq 0$, $h > 0$ und $x \in X$. Die Behauptungen folgen aus

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(T(h)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\Big) &= \frac{1}{h}\Big(\int_h^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\Big)\\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_t^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s\Big) \longrightarrow T(t)x - T(0)x, \quad h \to 0.\end{aligned}$$

iv), (2.13): Es sei $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ und $h > 0$. Definiere

$$\varphi_h : [0,t] \to X, \quad \varphi_h(s) = T(s)\frac{T(h)x - x}{h}$$

Dann konvergiert φ_h gleichmäßig gegen $T(\cdot)Ax$ für $h \to 0$. Somit folgt

$$\begin{aligned} A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s &= \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}(T(h)-\mathrm{id})\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = \lim_{h\searrow 0}\int_0^t \frac{1}{h}(T(h)-\mathrm{id})T(s)x\,\mathrm{d}s \\ &= \lim_{h\searrow 0}\int_0^t \varphi_h(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \lim_{h\searrow 0}\varphi_h(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$ □

Nach Definition 2.19 ist der Erzeuger A durch die Halbgruppe $\mathcal{T}$ eindeutig bestimmt. Daß umgekehrt auch der Erzeuger A die Halbgruppe $\mathcal{T}$ eindeutig bestimmt, zeigt folgende Proposition:

2.23 Proposition. *Es sei X ein Banachraum, $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe und A der Erzeuger von $\mathcal{T}$. Dann ist $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ dicht, A ist abgeschlossen und A bestimmt die Halbgruppe $\mathcal{T}$ eindeutig.*

Beweis. Da für jedes $x \in X$ die Abbildung $\mathbb{R}_+ \to X$, $t \mapsto T(t)x$ stetig ist, folgt mit Proposition 2.22

$$\mathcal{D}(A) \ni \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \longrightarrow x, \quad t \searrow 0.$$

Also ist $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ gezeigt.
Es sei nun eine Folge $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D}(A)$ und $x, y \in X$ gegeben, so daß $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ für $n \to \infty$. Es ist zu zeigen, daß $x \in \mathcal{D}(A)$ und $Ax = y$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(T(t)x - x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}(T(t)x_n - x_n) \overset{(2.13)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^t \lim_{n\to\infty} T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s \overset{(+)}{=} \int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

dabei gilt $(*)$, weil die Abbildung $[0,t] \to X$, $s \mapsto T(s)Ax_n$ gleichmäßig gegen $s \mapsto T(s)y$ konvergiert, und $(+)$ folgt aus der Abgeschlossenheit von $T(s)$. Nach Definition von A ist also $x \in \mathcal{D}(A)$ und

$$Ax = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s = y.$$

Es sei $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A. Es ist zu zeigen, daß $S(t) = T(t)$, $t \geq 0$. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ und $t > 0$ definiere $\eta : [0,t] \to X$, $\eta(s) := T(t-s)S(s)x$ (vgl. Proposition 2.11). Die Funktion η ist differenzierbar, denn für $s \in (0,t)$ und $|h|$ klein genug ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(\eta(s+h) - \eta(s)) &= \frac{1}{h}\Big(T(t-s-h)S(s+h)x - T(t-s)S(s)x\Big) \\ &= \underbrace{T(t-s-h)}_{\text{glm. beschränkt in } h}\frac{1}{h}\Big(S(s+h)x - S(s)x\Big) + \frac{1}{h}\Big(T(t-s-h) - T(t-s)\Big)\underbrace{S(s)x}_{\in\mathcal{D}(A)} \\ &\longrightarrow T(t-s)AS(s)x - T(t-s)AS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Daher ist η konstant auf $[0,t]$ und es folgt

$$T(t)x = \eta(0) = \eta(t) = S(t)x.$$

Da $T(t)$ und $S(t)$ beschränkt sind und $\mathcal{D}(A)$ in X dicht liegt, folgt $T(t) = S(t)$. □

Bemerkung. Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Eine Abbildung $u : \mathbb{R}_+ \to X$ heißt eine *klassische Lösung* von

$$\frac{d}{dt}x = Ax(t), \quad t \geq 0, \qquad x(0) = x_0, \tag{2.14}$$

falls u stetig differenzierbar ist, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$, und u das Anfangswertproblem (2.14) löst. Ist $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, so ist $T(\cdot)x_0$ die eindeutige klassische Lösung von (2.14). Für $k \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathcal{D}(A^k)$ ist $T(\cdot)x_0 \in C^k([0,\infty), X) \cap C^{k-1}([0,\infty), \mathcal{D}(A))$.

2.24 Lemma (Skalierung). *Es sei X ein Banachraum, $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\alpha > 0$ ist dann auch $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ mit $S(t) = \mathrm{e}^{t\lambda}\, T(\alpha t)$, $t \geq 0$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger $B = \alpha A + \lambda\,\mathrm{id}$.*

Beweis. Nachrechnen. □

2.25 Satz. *Es sei X ein Banachraum, $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Weiter seien $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \geq 1$ so gewählt, daß $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{\omega t}$, $t \geq 0$ (vgl. Proposition 2.4). Dann gilt:*

i) *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß für jedes $x \in X$ das uneigentliche Integral*

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\lambda}\, T(s)x \,\mathrm{d}s \tag{2.15}$$

existiert, so ist $\lambda \in \rho(A)$ und $R(\lambda) = R(\lambda, A)$.

ii) *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, so folgt $\lambda \in \rho(A)$ und $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ und es gelten*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega}, \tag{2.16}$$

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Beweis. i) Ohne Einschränkung kann man $\lambda = 0$ annehmen (das kann man durch Skalierung immer erreichen, siehe Lemma 2.24).
Für $x \in X$ und $h > 0$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(T(h) - \mathrm{id})R(0)x &= \frac{1}{h}(T(h) - \mathrm{id}) \int_0^\infty T(s)x\,\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^\infty T(s+h)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty T(s)x\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s \longrightarrow -x, \qquad h \searrow 0.\end{aligned}$$

Also ist $R(0)x \in \mathcal{D}(A)$ und $AR(0) = -x$, $x \in X$.
Umgekehrt sei nun $x \in \mathcal{D}(A)$ gegeben.

$$R(0)Ax = \lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s \overset{(1)}{=} \lim_{t\to\infty} A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \overset{(2)}{=} A \lim_{t\to\infty}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = AR(0)x = -x.$$

Dabei folgt (1) aus Proposition 2.22 iv) und (2) gilt, weil A abgeschlossen ist.

ii) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$. Nach i) genügt es zu zeigen, daß $R(\lambda)x$ für alle $x \in X$ existiert. Das und die Abschätzung (2.16) folgt, da für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t \mathrm{e}^{-s\lambda}\, T(s)x\,\mathrm{d}s \right\| &\leq \int_0^t \left\| \mathrm{e}^{-s\lambda}\, T(s)x \right\| \mathrm{d}s \leq M\|x\| \int_0^t \left|\mathrm{e}^{-s\lambda}\right| \mathrm{e}^{s\omega}\,\mathrm{d}s \\ &\leq M\|x\| \int_0^t \mathrm{e}^{s(\omega - \mathrm{Re}(\lambda))}\,\mathrm{d}s = M\|x\| \frac{1 - \mathrm{e}^{t(\omega-\mathrm{Re}(\lambda))}}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega} \leq \frac{M\|x\|}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega}.\end{aligned}$$

Es sei nun $n \geq 2$. Aus der Operatortheorie ist bekannt

$$(R(\lambda, A))^n = (\lambda - A)^{-n} = \frac{(-)^n}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}} (\lambda - A)^{-1},$$

also folgt mit (2.15)

$$\begin{aligned} \|(R(\lambda, A))^n\| &= \frac{1}{(n-1)!} \left\| \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\lambda}\, T(s)x \,\mathrm{d}s \right\| = \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_0^\infty s^{n-1}\, \mathrm{e}^{-s\lambda}\, T(s)x \,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \frac{M\,\|x\|}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1}\, \mathrm{e}^{s(\omega - \mathrm{Re}(\lambda))} \,\mathrm{d}s = \frac{M\,\|x\|}{(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^n}. \end{aligned}$$ □

Aus Satz 2.25 folgt, daß das Spektrum eines Erzeugers immer in einer linken Halbebene der komplexen Zahlenebene liegt.

2.26 Definition.

- Falls das Integral in (2.15) existiert, so nennt man es die *Laplace-Transformierte* von $T(\cdot)x$.
- Ist A der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}$, so heißt

$$s(A) := \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

  die *Spektralschranke* von A.

Ist A ein Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}$, so gilt immer

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0(\mathcal{T}) < \infty.$$

2.27 Beispiel (Multiplikationshalbgruppe). Es sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet und $q \in C(\Omega, \mathbb{C})$, so daß $\omega := \sup\{\mathrm{Re}(q(\xi)) : \xi \in \Omega\} < \infty$. Dann definiert

$$T_q(t) := M_{t\,\mathrm{e}^q}, \quad t \geq 0,$$

eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T}_q = (T_q(t))_{t\geq 0}$ auf $X = C_0(\Omega)$, siehe Proposition 2.18. Wir zeigen nun: Der Erzeuger von $\mathcal{T}_q$ ist der Multiplikationsoperator M_q.

Beweis. Es sei A der Erzeuger von $\mathcal{T}_q$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ und $\xi \in \Omega$:

$$(Af)(\xi) = \lim_{h\searrow 0} \frac{\mathrm{e}^{hq(\xi)}\, f(\xi) - f(\xi)}{h} = f(\xi) \lim_{h\searrow 0} \frac{\mathrm{e}^{hq(\xi)} - 1}{h} = f(\xi)q(\xi) = (M_q f)(\xi).$$

Also ist gezeigt, daß $A \subseteq M_q$. Nach Voraussetzung ist $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(M_q)$ für λ groß genug, also folgt auch $M_q \subseteq A$. □

2.3 Erzeugersätze

Proposition 2.22 und Satz 2.25 liefern notwendige Bedingungen, denen der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe genügen muß: Er muß dicht definiert und abgeschlossen sein, außerdem muß sein Spektrum in einer linken Halbebene von $\mathbb{C}$ liegen und die Potenzen der Resolvente in einer rechten Halbebene müssen gewisse Abschätzungen erfüllen.

2.28 Satz (Satz von Hille-Yosida-Phillips). *Für einen Banachraum X, $A \in \mathscr{L}(X)$ und Konstante $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

i) *A erzeugt eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ auf X mit*

$$\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t\omega}, \qquad t \geq 0.$$

ii) *A ist dicht definiert und abgeschlossen,* $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ *und*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega. \tag{2.18}$$

iii) *A ist dicht definiert und abgeschlossen,* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ *und*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \operatorname{Re}\lambda > \omega. \tag{2.19}$$

Die Beweisidee besteht darin, den Operator A mit beschränkten Operatoren zu approximieren. Für $n \in \mathbb{N}$, $n > \omega$ definiere die sogenannte *Yosida-Approximierenden*

$$A_n \;:=\; n\,A\,R(n, A) \;=\; n^2\,R(n, A) - n. \tag{2.20}$$

2.29 Lemma. *Es sei X ein Banachraum und* $A \in \mathscr{L}(X)$*, so daß ii) aus Satz 2.28 erfüllt ist, und für* $\lambda > \omega$ *setze* $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ *wie in (2.20). Dann ist* $A_\lambda \in L(X)$*,* $\lambda > \omega$*, und es gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,R(\lambda, A)x \;=\; x, \qquad x \in X, \tag{2.21}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x \;=\; Ax, \qquad x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.22}$$

Beweis. Zum Beweis von (2.21) sei $x \in \mathcal{D}(A)$ gegeben. Es gilt

$$\|\lambda\,R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega}\,\|Ax\| \;\longrightarrow\; 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Wegen $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq \frac{|\lambda|M}{\lambda-\omega}$ ist $\lambda R(\lambda, A)$ gleichmäßig beschränkt auf $(\omega + 1, \infty)$ (d. h., es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq c$, $\lambda > \omega + 1$). Da $\mathcal{D}(A)$ in X dicht ist, folgt (2.21) für beliebige $x \in X$.

Aus (2.21) folgt für $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x \;=\; \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda, A)x \;=\; \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax \;=\; Ax. \qquad \square$$

Beweis von Satz 2.28. i) ⇒ iii) folgt aus Proposition 2.23 und Satz 2.25.
iii) ⇒ ii) ist klar.
ii) ⇒ i) Setze $\mathbb{N}_{>\omega} := \{n \in \mathbb{N} : n > \omega\}$. Für $n \in \mathbb{N}_{>\omega}$ sei $\mathcal{T}_n = (T_n(t))_{t\geq 0}$ die von A_n erzeugte gleichmäßig stetige Halbgruppe. Wir werden zeigen, daß $T_n(t)$ für $n \to \infty$ gegen ein $T(t) \in L(X)$ konvergiert und daß $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A ist.

1. Schritt: *Abschätzung von* $\|T_n(t)\|$.
Für $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_{>\omega}$ und $\omega_1 := \max\left\{\frac{n\omega}{(n-\omega)} \;:\; n \in \mathbb{N}_{>\omega}\right\} < \infty$ ist

$$\begin{aligned} \|T_n(t)\| \;&=\; \mathrm{e}^{-tn}\,\|\,\mathrm{e}^{tn^2 R(n,A)}\,\| \;\leq\; \mathrm{e}^{-tn} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j n^{2j}}{j!}\,\|R(n, A)^j\| \;\leq\; M\,\mathrm{e}^{-tn} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j n^{2j}}{(n-\omega)^j\, j!} \\ &=\; M\,\mathrm{e}^{-tn}\,\mathrm{e}^{tn^2/(n-\omega)} \;=\; M\,\mathrm{e}^{nt\omega/(n-\omega)} \;\leq\; M\,\mathrm{e}^{t\omega_1}\,. \end{aligned}$$

2. Schritt. Aus der Reihendarstellung folgt $T_n(t)A_m = A_m T_n(t)$, $m, n \in \mathbb{N}_{>\omega}$, $t \geq 0$. Mit Proposition 2.22 ii) folgt

$$T_n(t)x - T_m(t)x = \int_0^t \frac{d}{ds}\,(T_n(s)T_m(t-s)x)\;\mathrm{d}s = \int_0^t T_n(s)T_m(t-s)\,(A_n x - A_m x)\;\mathrm{d}s.$$

Für $x \in \mathcal{D}(A)$ folgt mit der Abschätzung aus dem 1. Schritt für $t \geq 0$:

$$\|T_n(t)x - T_m(t)x\| \leq M^2 \|A_n x - A_m x\| \int_0^t e^{s\omega_1}\, ds \xrightarrow{(2.22)} 0, \qquad n, m \to \infty. \tag{2.23}$$

3. Schritt: *Für alle $y \in X$ existiert $T(t)y := \lim_{n\to\infty} T_n(t)y$ und für jedes $t_0 > 0$ konvergiert $T_n(\cdot)y \to T(\cdot)y$ gleichmäßig auf $[0, t_0]$ und $T(\cdot) \in C([0, t_0], X)$.* (Der Lesbarkeit halber schreiben wir $T(\cdot)$ statt $T(\cdot)|_{[0,t_0]}$, etc.)
Es sei $y \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ dicht liegt, gibt es ein $x \in \mathcal{D}(A)$, so daß $\|x - y\| < \varepsilon$. Da auf endlichen Intervallen $[0, t_0]$ die Konvergenz in (2.23) gleichmäßig in t erfolgt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}_{>\omega}$, daß $\|T_n(t)x - T_m(t)x\| < \varepsilon,\ n, m \geq N, t \in [0, t_0]$. Damit folgt für $n, m \geq N, t \in [0, t_0]$

$$\begin{aligned}\|T_n(t)y - T_m(t)y\| &\leq \|T_n(t)x - T_m(t)x\| + \|T_n(t)(y - x)\| + \|T_n(t)(y - x)\| \\ &\leq \varepsilon + (\|T_m(t)\| + \|T_n(t)\|)\, \|x - y\| \leq \left(1 + 2M e^{t_0\omega_1}\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

Für beliebiges $y \in X$ ist also $(T_n(\cdot)y)_n$ eine Cauchyfolge in $C([0, t_0], X)$, daher hat sie einen Grenzwert $T(\cdot)y \in C([0, t_0], X)$. Offensichtlich ist $T(t)y$ unabhängig von der Wahl von $t_0 > t$, so daß man eine auf ganz $\mathbb{R}_+$ wohldefinierte Funktion $T(\cdot)y$ erhält.

4. Schritt: *$\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ ist eine stark stetige Halbgruppe und $\|T(t)\| \leq M e^{t\omega},\ t \geq 0$.*
Die starke Stetigkeit von $\mathcal{T}$ wurde im 3. Schritt gezeigt. Die Halbgruppeneigenschaft folgt, weil jedes $\mathcal{T}_n$ sie hat, und es gilt wegen der Abschätzung im 1. Schritt

$$\|T(t)\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n(t)\| \leq \lim_{n\to\infty} M e^{tn\omega/(n-\omega)} \leq M e^{t\omega}, \qquad t \geq 0.$$

5. Schritt: *A ist der Erzeuger von $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$.*
Es sei B der Erzeuger von $\mathcal{T}$. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ und $t_0 > 0$ konvergiert $T_n(\cdot)x$ gegen $T(\cdot)x$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[0, t_0]$. Da $A_n x \to Ax$ und $T_n \to T$ gleichmäßig auf $[0, t_0]$ für $n \to \infty$, konvergiert $\frac{d}{dt} T_n(\cdot)x = T(\cdot)A_n x$ gleichmäßig gegen $T(\cdot)Ax$ auf $[0, t_0]$. Folglich ist $T(\cdot)x$ differenzierbar und $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax$, $t \in [0, t_0]$, also folgt $x \in \mathcal{D}(B)$ und $Bx = \frac{d}{dt}T(0)x = T(0)Ax = Ax$. Damit ist $A \subseteq B$ gezeigt. Für jedes $\lambda > \omega$ gilt $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, also auch $R(\lambda, A) \subseteq R(\lambda, B)$. Aus $\mathcal{D}(R(\lambda, A)) = X = \mathcal{D}(R(\lambda, B))$ folgt $R(\lambda, A) = R(\lambda, B)$, also $A = B$. □

Als Korollar erhält man einen Erzeugersatz für Kontraktionshalbgruppen:

2.30 Korollar (Satz von Hille-Yosida). *Für einen Banachraum X und $A \in \mathcal{L}(X)$ sind äquivalent:*

i) *A erzeugt eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ auf X, d. h.,*

$$\|T(t)\| \leq 1, \qquad t \geq 0.$$

ii) *A ist dicht definiert und abgeschlossen, $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ und*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0. \tag{2.24}$$

iii) *A ist dicht definiert und abgeschlossen, $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ und*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{2.25}$$

Beweis. Die Behauptung folgt mit $M = 1$ und $\omega = 0$ aus Satz 2.28, weil $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \|R(\lambda, A)\|^n \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)^n}$. □

2.31 Erzeuger stark stetiger Gruppen.

Definition. Es sei $\mathcal{S} = (S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige Gruppe auf einem Banachraum X. Der Operator A, definiert durch

$$\mathcal{D}(A) := \Big\{x \in X \;:\; \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}(S(h)x - x) \text{ existiert}\Big\},$$
$$Ax := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(S(h)x - x), \qquad x \in \mathcal{D}(A),$$

heißt der (*infinitesimale*) *Erzeuger von* $\mathcal{S}$.

Offensichtlich sind $\mathcal{T}_+ = (T_+(t))_{t\geq 0}$ und $\mathcal{T}_- = (T_-(t))_{t\geq 0}$ mit $T_+(t) = S(t)$ und $T_-(t) = S(-t)$, $t \geq 0$, stark stetige Halbgruppen auf X mit Erzeuger $\pm A$.

Satz (Erzeugersatz für stark stetige Gruppen). *Es seien X ein Banachraum, $A \in \mathscr{L}(X)$, $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

i) *A erzeugt eine stark stetige Gruppe $\mathcal{S} = (S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf X mit*

$$\|S(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{|t|\omega}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ii) *A ist dicht definiert und abgeschlossen, $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ und*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\; |\lambda| > \omega. \tag{2.26}$$

iii) *A ist dicht definiert und abgeschlossen, $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ und*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(|\operatorname{Re}\lambda| - \omega)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\; |\operatorname{Re}\lambda| > \omega. \tag{2.27}$$

iv) *A und $-A$ erzeugen stark stetige Halbgruppen $\mathcal{T}_\pm = (T_\pm(t))_{t\geq 0}$ mit*

$$\|T_\pm(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t\omega}, \qquad t \geq 0.$$

Beweis. Übungsaufgabe 2.6. □

Notwendige Voraussetzung für einen Operator $A \in \mathscr{L}(X)$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe zu sein, ist, daß sein Definitionsbereich dicht ist. Wenn das nicht der Fall ist, aber alle anderen Voraussetzungen aus dem Satz von Hille-Yosida-Phillips (Satz 2.28 ii) bzw. iii)) erfüllt sind, so wird A auf einem geeigneten Teilraum von X zu einem Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe.

2.32 Definition. Es sei X ein Banachraum und $X_0 \subseteq X$ ein Unterraum. Zu $A \in \mathscr{L}(X)$ heißt $A_|$, definiert durch

$$\mathcal{D}(A_|) = \{x \in \mathcal{D}(A) \cap X_0 \;:\; Ax \in X_0\}, \qquad A_| x = Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A_|),$$

der *Teil von A in X_0*.

2.33 Lemma. *Es sei X ein Banachraum, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ ein linearer abgeschlossener aber nicht notwendig dicht definierter Operator. Es sei $X_0 := \overline{\mathcal{D}(A)}$ und $A_|$ der Teil von A in X_0. Gibt es $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, so daß*

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \;:\; \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A) \quad \textit{und} \quad \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N},\; \lambda > \omega,$$

so erzeugt $A_|$ eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ auf X_0 mit $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t\omega}$, $t \geq 0$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist X_0 ein Banachraum. Für $\lambda \in \rho(A)$ ist $R(\lambda, A)(X_0) \subseteq \mathcal{D}(A_|)$, da $\mathcal{D}(A_|) = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax \in X_0\}$. Folglich ist $\rho(A) \subseteq \rho(A_|)$ und $R(\lambda, A_|) \subseteq R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > \omega$ gilt also $\|R(\lambda, A_|)^n\| \leq \|R(\lambda, A)^n\|$. Wenn gezeigt ist, daß $\mathcal{D}(A_|)$ dicht in X_0 ist, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Hille-Yosida-Phillips (Satz 2.28). Es sei dazu ein $x \in X_0$ vorgegeben. Setze $x_n = nR(n, A)x$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > \omega$. Da $x \in X_0$, folgt

$$Ax_n = nAR(n, A)x = n(nR(n, A) - x) \in X_0,$$

also $x_n \in \mathcal{D}(A_|)$. Da nach Lemma 2.29 $x_n \to x$, $n \to \infty$, ist das Lemma bewiesen. □

2.34 Beispiele.
1. Translationshalbgruppe auf $BUC(\mathbb{R})$.
Es sei $X = BUC(\mathbb{R})$ und $A \in \mathscr{L}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in X : f \in C^1(\mathbb{R}), f' \in X\}, \qquad Af = f'.$$

Dann erzeugt A die Translationshalbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ mit $(T(t)f)(\xi) = f(t + \xi)$, $t \geq 0$, $f \in X$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Beweis.
(i) <u>A ist dicht definiert</u>: Wähle $f \in X$. Definiere

$$f_t(\xi) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi + s)\,\mathrm{d}s, \qquad t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist f_t stetig und $\|f_t\| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|f\|\,\mathrm{d}s = \|f\| < \infty$. Weiter ist f_t gleichmäßig stetig. Sei nämlich $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon$, falls $|\xi - \eta| < \delta$. Damit folgt für $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}$ mit $|\xi - \eta| < \delta$:

$$|f_t(\xi) - f_t(\eta)| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \big|f(\xi + s) - f(\eta + s)\big|\,\mathrm{d}s \leq \varepsilon.$$

Folglich ist $f_t \in X$, $t > 0$. Offensichtlich ist jedes f_t stetig differenzierbar mit $f_t'(\xi) = \frac{1}{t}(f(t + \xi) - f(\xi))$, also gilt sogar $f_t \in \mathcal{D}(A)$, $t > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle wieder $\delta > 0$ wie oben. Dann gilt für alle $t \in (0, \delta)$

$$\|f_t - f\| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\{ \left| \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi + s) - f(\xi)\,\mathrm{d}s \right| \right\} \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{|f(\xi + s) - f(\xi)|}_{<\varepsilon,\text{ weil } s\in(0,\delta)}\,\mathrm{d}s \right\} < \varepsilon,$$

d. h., $f_t \to f$, $t \to 0$.

(ii) <u>A ist abgeschlossen und $\sigma(A) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$</u>: Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$ definiere

$$g_\lambda(\xi) = \begin{cases} \int_\xi^\infty \mathrm{e}^{(\xi - s)\lambda} f(s)\,\mathrm{d}s, & \mathrm{Re}(\lambda) > 0, \\ -\int_{-\infty}^\xi \mathrm{e}^{(\xi - s)\lambda} f(s)\,\mathrm{d}s, & \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \end{cases} \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist g_λ stetig und es gilt $\|g_\lambda\| \leq \frac{\|f\|}{|\mathrm{Re}(\lambda)|}$, denn beispielsweise für $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ gilt

$$\|g_\lambda\| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\{ \left| \int_\xi^\infty \mathrm{e}^{(\xi - s)\lambda}\ f(s)\,\mathrm{d}s \right| \right\} \leq \|f\| \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\{ \int_\xi^\infty \mathrm{e}^{(\xi - s)\,\mathrm{Re}(\lambda)}\ \mathrm{d}s \right\} = \frac{\|f\|}{\mathrm{Re}(\lambda)}. \tag{2.28}$$

Die gleichmäßige Stetigkeit von g_λ folgt für $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ aus

$$\begin{aligned}
|g_\lambda(\xi) - g_\lambda(\eta)| &= \left| \int_\xi^\infty e^{(\xi-s)\lambda} f(s)\, ds - \int_\eta^\infty e^{(\eta-s)\lambda} f(s)\, ds \right| \\
&= \left| \int_\xi^\eta e^{(\xi-s)\lambda} f(s)\, ds + \int_\eta^\infty e^{(\xi-s)\lambda} f(s) - e^{(\eta-s)\lambda} f(s)\, ds \right| \\
&= \left| \int_0^{\eta-\xi} e^{s\lambda} f(s)\, ds + \int_\eta^\infty e^{(\eta-s)\lambda} f(s)[e^{(\xi-\eta)\lambda} - 1]\, ds \right| \\
&\le \|f\| \left| \int_0^{\eta-\xi} e^{-s\lambda}\, ds \right| + \left| [e^{(\xi-\eta)\lambda} - 1] \int_0^\infty e^{-s\lambda} f(s)\, ds \right|,
\end{aligned}$$

da die rechte Seite nur noch von $\xi - \eta$ abhängt und gegen 0 konvergiert, falls $\xi - \eta \to 0$. Insgesamt ist also $g_\lambda \in X$ gezeigt. Da offensichtlich g_λ stetig differenzierbar ist, folgt sogar $g_\lambda \in \mathcal{D}(A)$ und man rechnet leicht nach $(A - \lambda)g_\lambda = f$. Insbesondere folgt, daß $\lambda - A$ surjektiv ist. Injektivität von $\lambda - A$ folgt, weil für $f \in C^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\lambda f - f' = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\xi) = c\, e^{\xi\lambda}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

also $f \in X$ genau für $c = 0$. Wegen (2.28) ist $\|(\lambda - A)^{-1} f\| = \|g_\lambda\| \le \frac{\|f\|}{|\mathrm{Re}(\lambda)|}$, $f \in X$, d. .h.,

$$\lambda \in \rho(A) \quad \text{und} \quad \|(A-\lambda)^{-1}\| \le \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}.$$

Daher ist $A - \lambda$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen abgeschlossen, und somit ist auch A abgeschlossen.

(iii) A ist Erzeuger einer stark stetigen Gruppe $\mathcal{T}$: Folgt aus dem Satz von Hille-Yosida für Kontraktionshalbgruppen (Satz 2.30) und dem Erzeugersatz für stark stetige Gruppen (Abschnitt 2.31).

(iv) Bestimmung von $\mathcal{T}$: Für $f \in \mathcal{D}(A)$ definiere $u(t,\xi) = T(t)f(\xi)$ für $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Dann ist $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$ und Lösung von

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(t,\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi} u(t,\xi), &\qquad& \xi \in \mathbb{R},\ t > 0, \\
u(0,\xi) &= f(\xi), && \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Setze $v(t,\xi) = u(\xi - t, \xi + t)$ für $t, \xi \in \mathbb{R}$. Es gilt $\frac{\partial}{\partial t} v(t,\xi) = 0$, also $v(t,\xi) = v(\xi,\xi) = u(0, 2\xi)$ und daher

$$T(t)f(\xi) = u(t,\xi) = v\Big(\frac{\xi + t}{2}, \frac{\xi - t}{2}\Big) = u(0, \xi + t) = f(\xi + t), \qquad t, \xi \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

2. Translationshalbgruppe auf $\mathscr{L}_p(\mathbb{R})$.

Es sei $1 \le p < \infty$ und $X = \mathscr{L}_p(\mathbb{R})$. Ist $A \in \mathscr{L}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{D}(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}) = \{f \in X : f \text{ absolut stetig}, \ f' \in X\}, \qquad Af = f'.$$

Dann erzeugt A die Translationshalbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t \ge 0}$ mit $(T(t)f)(\xi) = f(t + \xi)$, $t \ge 0$, $f \in X$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Beweis. Übungen. $\square$

3. Diffusionshalbgruppe auf $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$.
Es sei $1 < p < \infty$ und $X = \mathscr{L}_p(R^n)$. Dann ist $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$, definiert durch $T(0) = \mathrm{id}$ und

$$(T(t)f)(\xi) \;=\; (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi-s|}{4t}} f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \xi \in \mathbb{R},\; f \in X,\; t > 0, \tag{2.29}$$

die *Diffusionshalbgruppe* (oder *Wärmeleitungshalbgruppe* oder *Brownsche Halbgruppe*).
$\mathcal{T}$ ist eine stark stetige Halbgruppe auf X. Der Erzeuger A von $\mathcal{T}$ ist

$$(Af)(\xi) = (\Delta f)(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} f(\xi), \qquad f \in \mathcal{D}(A),\; \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{D}(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n) \;:\; f \text{ zweimal schwach diff-bar und } \Delta f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Beweis. (i) $\mathcal{T}$ ist eine stark stetige Halbgruppe:

Setze $\gamma_t(s) := (4\pi t)^{-1}\,\mathrm{e}^{\frac{-|s|^2}{4t}},\; t > 0,\; s \in \mathbb{R}^n$. Man kann zeigen, daß

$$\gamma_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;:\; \lim_{|\xi|\to\infty} |x|^k D^\alpha f(x) \to 0,\; k \in \mathbb{N},\; \alpha \in \mathbb{N}^n \}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Schwartzraum*. Man kann zeigen, daß $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ dicht für $p \geq 1$, und daß $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ invariant unter Fouriertransformation ist.

Es gilt

$$T(t)f = \gamma_t * f, \qquad t > 0,\; f \in X,$$

und die Youngsche Ungleichung liefert

$$\|T(t)f\|_p \leq \|\gamma_t\|_1 \, \|f\|_p = \|f\|_p.$$

Damit ist gezeigt: $\|T(t)\| \leq 1,\; t \geq 0$.

Die Halbgruppeneigenschaft von $\mathcal{T}$ folgt aus $\gamma_{t+s} = \gamma_s * \gamma_t$ (nachrechnen!) und der Assoziativität der Faltung. Die starke Stetigkeit von $\mathcal{T}$ kann mit Mitteln der Maßtheorie gezeigt werden.

(ii) Erzeuger von $\mathcal{T}$: Wir zeigen die Behauptung nur für $p = 2$.

Es sei A der Erzeuger von $\mathcal{T}$.

. . . .

□

2.4 Dissipative Operatoren und Kontraktionshalbgruppen

2.35 Definition. Es seien X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ (nicht notwendig dicht definiert). Dann A heißt *A dissipativ*, falls

$$\|(\lambda - A)x\| \;\geq\; \lambda\|x\|, \qquad \lambda > 0,\; x \in \mathcal{D}(A).$$

2.36 Proposition. *Ist X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ dissipativ, dann gilt:*

i) *$\lambda - A$ ist injektiv für $\lambda > 0$ und*

$$\|(\lambda - A)^{-1}y\| \leq \frac{1}{\lambda}\,\|y\|, \qquad \lambda > 0,\; y \in \mathrm{rg}(\lambda - A).$$

ii) *$\lambda - A$ ist surjektiv für ein $\lambda > 0$* $\iff$ *$\lambda - A$ ist surjektiv für alle $\lambda > 0$.*
In diesem Fall ist $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$.

iii) *A ist abgeschlossen* $\iff$ $\operatorname{rg}(A - \lambda)$ *ist abgeschlossen für ein $\lambda > 0$,*
$\iff$ $\operatorname{rg}(A - \lambda)$ *ist abgeschlossen für alle $\lambda > 0$.*

iv) *Gilt $R(\lambda, A) \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)}$, so ist A abschließbar. In diesem Fall ist auch der Abschluß $\overline{A}$ dissipativ und es gilt* $\operatorname{rg}(\lambda - \overline{A}) = \overline{\operatorname{rg}(\lambda - A)}$, $\lambda > 0$.

Beweis. i) ist klar.

ii) Angenommen, $\lambda_0 - A$ ist surjektiv für ein $\lambda_0 > 0$. Nach i) ist dann $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $\|R(\lambda_0, A)\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$. Für $\mu \in (0, 2\lambda_0)$ ist

$$\mu - A = \mu - \lambda_0 + \lambda_0 - A = \Big((\mu - \lambda_0)R(\lambda_0, A) + \mathrm{id}\Big)(\lambda_0 - A)$$

bijektiv nach dem Satz von Neumann, da $\|(\mu - \lambda_0)R(\lambda_0, A)\| < 1$. Also folgt $(0, 2\lambda_0) \subseteq \rho(A)$. Insbesondere folgt also z. B. $(0, \frac{3}{2}\lambda_0] \in \rho(A)$, induktiv also $(0, (\frac{3}{2})^n] \in \rho(A)$ und dann wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(0, (\frac{3}{2})^n] = (0, \infty)$ die Behauptung.

iii) Daß A abgeschlossen ist, ist äquivalent dazu, daß $A - \lambda$ für ein (und dann für alle $\lambda > 0$) abgeschlossen ist. Das wiederum ist äquivalent dazu, daß

$$(\lambda - A)^{-1} : \operatorname{rg}(\lambda - A) \to X$$

für ein (alle) $\lambda > 0$ abgeschlossen ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist das äquivalent dazu, daß $\operatorname{rg}(\lambda - A)$ abgeschlossen ist für ein (alle) $\lambda > 0$.

iv) Angenommen, $\operatorname{rg}(\lambda - A) \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)}$. Es seien $y \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0$ und $Ax_n \to y$ für $n \to \infty$. Es ist zu zeigen, daß $y = 0$. Für alle $w \in \mathcal{D}(A)$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\|\lambda(\lambda - A)x_n - (\lambda - A)w\| \geq \lambda \, \|\lambda x_n - w\|.$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ erhält man also

$$\begin{aligned} & \|\lambda y - (\lambda - A)w\| \geq \lambda \, \|w\|, \\ \Longrightarrow \quad & \|y - w - \lambda^{-1}Aw\| \geq \|w\|, \\ \overset{\lambda\to\infty}{\Longrightarrow} \quad & \|y - w\| \geq \|w\|. \end{aligned}$$

Da $y \in \overline{\operatorname{rg}(A)} \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)}$, gibt es ein Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$, die gegen y konvergiert. Daher folgt aus obiger Ungleichung $\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|w_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|y - w_n\| = 0$.
Zum Beweis der Dissipativität von $\overline{A}$ sei $x \in \mathcal{D}(\overline{A})$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $x_n \to x$ und $Ax_n \to \overline{A}x$ für $n \to \infty$. Da die Norm stetig ist, folgt

$$\|(\lambda - A)x\| \;=\; \lim_{n\to\infty} \|(\lambda - A)x_n\| \;\geq\; \lambda \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \;=\; \lambda\|x\|.$$

Da $\operatorname{rg}(\lambda - A) \subseteq \operatorname{rg}(\lambda - \overline{A})$ dicht liegt, folgt $\overline{\operatorname{rg}(\lambda - A)} = \overline{\operatorname{rg}(\lambda - \overline{A})} = \operatorname{rg}(\lambda - \overline{A})$. Die letzte Gleichheit folgt aus iii), da $\overline{A}$ abgeschlossen ist. □

Speziell in Hilberträumen gilt

2.37 Lemma. *Es sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$. Dann gilt*

$$A \text{ dissipativ} \quad \iff \quad \operatorname{Re}(Ax\,, x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Beweis. "$\Longleftarrow$" Es sei $x \in \mathcal{D}(A)$ gegeben, ohne Einschränkung $\|x\| = 1$. Dann gilt für $\lambda > 0$

$$\|(\lambda - A)x\| = \|(\lambda - A)x\|\,\|x\| \geq |((\lambda - A)x\,, x)| \geq \operatorname{Re}(\lambda - (Ax\,, x)) = \lambda - \operatorname{Re}((Ax\,, x)) \geq \lambda.$$

"$\Longrightarrow$" Es sei $x \in \mathcal{D}(A)$ gegeben, ohne Einschränkung sei $\|x\| = 1$. Für $\lambda > 0$ definiere $x_\lambda = \|(\lambda - A)x\|^{-1}(\lambda - A)x$. Dann ist $\lim_{\lambda\to\infty} x_\lambda = \lim_{\lambda\to\infty} \|x - \lambda^{-1} Ax\|^{-1} (x - \lambda^{-1}A)x = x$ und es gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}\lambda &\leq \|(\lambda - A)x\| = ((\lambda - A)x\,, x_\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda x\,, x_\lambda) - \operatorname{Re}(Ax\,, x_\lambda)\\ &\xrightarrow{\lambda\to\infty} \lambda\|x\| - \operatorname{Re}(Ax\,, x).\end{aligned}$$ □

2.38 Lemma. *Es sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$ ein dissipativer Operator. Ist $\lambda - A$ surjektiv für ein $\lambda > 0$, so ist A dicht definiert.*

Beweis. Nach Proposition 2.36 ii) ist $\lambda \in \rho(A)$. Es ist zu zeigen, daß $\operatorname{rg}(\lambda - A)^{-1} \subseteq H$ dicht liegt. Wähle dazu $v \in \operatorname{rg}(\lambda - A)^\perp$. Es ist also $(v\,, (\lambda - A)^{-1}u) = 0,\; u \in H$. Speziell für $u = v$ hat man also

$$\begin{aligned}0 &= (v\,, (\lambda - A)^{-1}v) = ((\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}v\,, (\lambda - A)^{-1}v)\\ &= \lambda\|(\lambda - A)^{-1}v\|^2 - \operatorname{Re}(A(\lambda - A)^{-1}v\,, (\lambda - A)^{-1}v) \geq \lambda\|(\lambda - A)^{-1}v\|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

also $\|(\lambda - A)^{-1}v\| = 0$. Da $(\lambda - A)^{-1}$ injektiv ist, folgt $v = 0$, also die Behauptung. □

Lemma 2.37 und Lemma 2.38 sind Spezialfälle folgender beider Lemmata:

2.39 Dissipative Operatoren in Banachräumen. Es sei X ein Banachraum mit Dualraum X'. Zu jedem $x \in X$ heißt

$$\mathcal{J}(x) := \{\, x' \in X' \;:\; \langle x\,, x'\rangle = \|x\| = \|x'\|\,\}.$$

die *Dualitätsmenge* von x. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist $\mathcal{J}(x) \neq \emptyset$, $x \in X$. Die Elemente $x' \in \mathcal{J}(x)$ heißen *normierte Tangentialfunktionale in* x. Falls X sogar ein Hilbertraum ist, so besteht $\mathcal{J}(x)$ aus genau einem Element.

Analog zu Lemma 2.37 gilt:

Lemma. *Es sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$. Dann gilt*

$$A \text{ dissipativ} \iff \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\;\; \exists\; j(x) \in \mathcal{J}(x) \;:\; \operatorname{Re}\langle Ax\,, j(x)\rangle \leq 0.$$

Ist X ein reflexiver Banachraum, so hat man analog zu Lemma 2.38:

Lemma. *Es sei X ein reflexiver Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ ein dissipativer Operator. Ist $\lambda - A$ surjektiv für ein $\lambda > 0$, so ist A dicht definiert.*

2.40 Satz (Satz von Lumer-Phillips). *Es sei X ein Banachraum, $A \in \mathscr{L}(X)$ dicht definiert und dissipativ. Dann sind äquivalent:*

i) *$\overline{A}$ erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe.*

ii) *Es gibt ein $\lambda > 0$, so daß $\operatorname{rg}(\lambda - A) \subset X$ dicht.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Nach dem Satz von Hille-Yosida (Korollar 2.30) ist $\operatorname{rg}(\lambda - \overline{A}) = X$, nach Proposition 2.36 folglich $\overline{\operatorname{rg}(\lambda - A)} = \operatorname{rg}(\lambda - \overline{A}) = X$.

ii) $\Rightarrow$ i) Da $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ dicht ist, folgt nach Proposition 2.36 iv), daß A abschließbar und $\overline{A}$ surjektiv ist. Aus Proposition 2.36 i) folgt, daß $\lambda \in \rho(A)$ und $\|R(\lambda, \overline{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Nach dem Satz von Hille-Yosida (Korollar 2.30) ist $\overline{A}$ der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe. □

Bemerkung. Es sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$. Falls

i) $(Ax\,, x) \le 0,\ \ x \in \mathcal{D}(A)$

ii) $\overline{\operatorname{rg}(\lambda - A)} = H$ für ein $\lambda > 0$,

dann erzeugt $\overline{A}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf X. Bedingung i) zeigt, daß A dissipativ ist, zusammen mit Bedingung ii) folgt, daß A dicht definiert ist (Proposition 2.38). Aus dem Satz von Lumer-Phillips folgt dann, daß $\overline{A}$ eine stark stetige Halbgruppe erzeugt.

Insbesondere für Funktionenräume lassen sich die Bedingungen i) und ii) oft leichter nachweisen als die Bedingungen aus dem Satz von Hille-Yosida.

2.41 Beispiel. Es sei $X = C([0,1])$ und $A \in \mathscr{L}(X)$, definiert durch

$$Af = f', \qquad f \in \mathcal{D}(A) = \left\{ f \in C^1([0,1]) \,:\, f(0) = 0,\ f' \in C([0,1]) \right\}.$$

Der Operator A ist abgeschlossen und surjektiv, für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\lambda - A$ bijektiv und

$$R(\lambda, A)f(\xi) \;=\; \int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(\xi - s)\lambda}\, f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \xi \in [0,1],\ \lambda \in \mathbb{C},\ f \in X.$$

Aus der Abschätzung

$$\|R(\lambda, A)f\| \;\le\; \|f\| \sup_{\xi \in [0,1]} \int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(\xi - s)\operatorname{Re}\lambda}\ \mathrm{d}s \;=\; \frac{1}{\lambda}\,\|f\|\,(1 - \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\lambda}) \;\le\; \frac{1}{\lambda}\,\|f\|, \qquad \lambda \ne 0,$$

folgt, daß A dissipativ ist.

A ist aber nicht dicht definiert und erzeugt deshalb keine stark stetige Halbgruppe auf X. Nach Lemma 2.33 induziert A eine stark stetige Halbgruppe auf dem Teilraum

$$X_0 = \overline{\mathcal{D}(A)} = \{ f \in X \,:\, f(0) = 0 \}.$$

Ist $A_|$ der Teil von A in X, d. h.,

$$A_| f = f', \qquad f \in \mathcal{D}(A_|) = \left\{ f \in X \,:\, f \in C^1([0,1]),\ f(0) = f'(0) = 0 \right\},$$

dann ist $A_|$ in X_0 dicht definiert (Lemma 2.33), dissipativ und $\lambda - A_| : X_0 \to X_0$ ist surjektiv, also erzeugt $A_|$ nach dem Satz von Lumer-Phillips (Satz 2.40) eine stark stetig Halbgruppe.

2.42 Definition. Eine (stark stetige) Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t \ge 0}$ auf einem Banachraum X heißt (*stark stetige*) *unitäre Halbgruppe*, falls jedes $T(t)$, $t \ge 0$ unitär ist. Analog ist der Begriff (stark stetige) unitäre Gruppe definiert.

2.43 Satz (Satz von Stone). *Es sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ ein dicht definierter linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

i) *A erzeugt eine unitäre Gruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ auf H.*

ii) *A ist schief-selbstadjungiert, d. h., $A^* = -A$.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Nach Voraussetzung gilt $T(t)^* = T(t)^{-1} = T(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, also ist $\mathcal{T}^* = (T(t)^*)_{t \in \mathbb{R}}$ eine stark stetig Gruppe mit Erzeuger $-A$.
Ist $x \in \mathcal{D}(A)$, so folgt

$$(x\,, Ay) = \lim_{t \searrow 0} \Big(x\,,\ \frac{1}{t}(T(t) - \mathrm{id})\,y \Big) = \lim_{t \searrow 0} \Big(\frac{1}{t}(T(t)^* - \mathrm{id})\,x\,,\ y \Big) = (-Ax\,, y),$$

also $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$ und $A^*x = -Ax$ für $x \in \mathcal{D}(A)$. Andererseits sei nun $x \in \mathcal{D}(A^*)$ gegeben. Da $-A$ der Erzeuger von $\mathcal{T}^*$ ist, folgt mit Proposition 2.22 iv)

$$\frac{1}{t}\,(T(t)^*x - x) = \frac{1}{t}\,(-A)\int_0^t T(s)^*x\,\mathrm{d}s.$$

Da $-A \subseteq A^*$ und $T(s)^*x \in \mathcal{D}(-A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$, $s \in [0,t]$, folgt, weil A^* abgeschlossen ist,

$$\frac{1}{t}\,(T(t)^*x - x) = \frac{1}{t}\,A^*\int_0^t T(s)^*x\,\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\,\int_0^t A^*\,T(s)^*x\,\mathrm{d}s.$$

Beachte, daß $(T(s)^*x\,,Ay) = (x\,,T(s)Ay) = (x\,,AT(s)y) = (A^*x\,,T(s)y)$, $y \in \mathcal{D}(A)$, so daß also $T(s)^*x \in \mathcal{D}(A^*)$. Da $T(s)$ beschränkt ist, folgt $A^*T(s)^* = (T(s)A)^*$. Da A und $T(s)$ vertauschen und wegen $(AT(s))^* \subseteq T(s)^*A^*$ folgt

$$\frac{1}{t}\,(T(t)^*x - x) = \frac{1}{t}\,\int_0^t T(s)^*A^*x\,\mathrm{d}s \xrightarrow{t\to 0} T(0)^*A^*x = A^*x.$$

letzteres, weil $s \to T(s)^*A^*x$ stetig in 0 ist. Folglich ist $x \in \mathcal{D}(-A)$ (weil $-A$ der Erzeuger von $\mathcal{T}^*$ ist) und es gilt $-Ax = A^*x$.
Alternativer Beweis für "$A^* \subseteq -A$": Wegen $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$ ist A^* dicht definiert, A^* ist abgeschlossen, weil adjungierte Operatoren immer abgeschlossen sind. Man kann zeigen: $\lambda \in \rho(A) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(A^*)$ und in diesem Fall $R(\lambda,A)^* = R(\overline{\lambda},A^*)$. (Insbesondere erzeugt also auch A^* eine stark stetige Kontraktionsgruppe). Weil $\mathcal{T}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist, ist $(1,\infty) \subseteq \rho(\pm A) \cap \rho(\pm A^*)$, also $R(\lambda,-A) \subseteq R(\lambda,A^*)$ (weil $-A \subseteq A^*$). Weil $\mathcal{D}(\lambda - A) = \mathcal{D}(\lambda - A^*) = H$, hat man also $R(\lambda,-A) = R(\lambda,A^*)$.

ii) $\Rightarrow$ i) Nach Voraussetzung sind A und $-A$ dicht definiert und abgeschlossen und es gilt

$$(Ax\,,x) = (x\,,A^*x) = -(x\,,Ax) = -\overline{(Ax\,,x)}, \qquad x \in \mathcal{D}(A),$$

also sind A und $-A$ dissipativ. Nach dem Satz von Lumer-Phillips (Satz 2.40) erzeugen A und $-A$ Kontraktionshalbgruppen, also erzeugt A eine Kontraktionsgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H (siehe Abschnitt 2.31). Es ist noch zu zeigen, daß $T(t)^* = T(t)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist $T(s)$ surjektiv (weil sogar invertierbar) und isometrisch, denn

$$\|x\| = \|T(s)^{-1}T(s)x\| \le \|T(s)^{-1}\|\,\|T(s)x\| \le \|T(-s)\|\,\|T(s)\|\,\|x\|, \qquad x \in H.$$

Da $\|T(s)\| \le 1$, $s \in \mathbb{R}$, (weil $\mathcal{T}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist) folgt aus obiger Ungleichung $\|x\| = \|T(s)x\|$, $x \in H$. Folglich ist $T(s)$ unitär (siehe z. B. [Kat80, V § 2.2]). □

2.44 Bemerkung. Durch Skalierung erhält man zu einer beliebigen stark stetigen Halbgruppe eine beschränkte stark stetige Halbgruppe; dabei verschiebt sich das Spektrum des Erzeugers nach links (Lemma 2.24). Diese ist aber nicht notwendigerweise eine Kontraktionshalbgruppe.
Das nachfolgende Lemma zeigt, daß sie aber bezüglich einer zur gegebenen Norm äquivalenten Norm eine Kontraktionshalbgruppe ist. Daher gilt der Erzeugersatz von Lumer-Phillips (wenigstens theoretisch) für beliebige stark stetige Halbgruppen.

2.45 Lemma. *Es sei $(X,\|\cdot\|)$ ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge 0}$ eine beschränkte stark stetige Halbgruppe auf X. Dann ist durch*

$$\|x\|_{\mathcal{T}} := \sup\{\,\|T(s)x\| : s \ge 0\,\}, \qquad x \in X,$$

eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm definiert, und $\mathcal{T}$ ist eine Kontraktionshalbgruppe auf $(X,\|\cdot\|_{\mathcal{T}})$.

Beweis. Da $\mathcal{T}$ eine beschränkte Halbgruppe ist, gibt es $M \geq 1$, so daß $\|T(s)\| \leq M,\ s \geq 0$. Man rechnet leicht nach, daß $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$ alle Eigenschaften einer Norm hat. Außerdem gilt

$$\|x\| = \|T(0)x\| \leq \|x\|_{\mathcal{T}} = \sup\{\, \|T(s)x\| : s \geq 0 \,\} \leq M\|x\|, \quad x \in X,$$

also sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$ äquivalent. Ist $x \in X$ und $t \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} \|T(t)x\|_{\mathcal{T}} &= \sup\{\, \|T(t)T(s)x\| : s \geq 0 \,\} = \sup\{\, \|T(t+s)x\| : s \geq 0 \,\} \\ &\leq \sup\{\, \|T(s)x\| : s \geq 0 \,\} = \|x\|_{\mathcal{T}}, \end{aligned}$$

also $\|T(t)\| \leq 1,\ t \geq 0$. □

Kapitel 3

Analytische Halbgruppen

In Proposition 2.36 wurde gezeigt, daß das Spektrum eines dissipativen Operators A in einer linken Halbebene liegt und die Resolvente auf der rechten Halbachse die Abschätzungen $\|R(\lambda, A)\| \leq \lambda^{-1}$ erfüllt, falls $\lambda - A$ für ein $\lambda > 0$ surjektiv ist.
In diesem Kapitel untersuchen wir lineare Operatoren, deren Spektrum in einem Sektor liegt, und deren Resolvente außerhalb des Sektors einer Abschätzung genügt.
Zunächst einige Erinnerungen:

Cauchys Integralformel. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, so daß die abgeschlossene Kreisscheibe $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ in Ω liegt. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta,$$

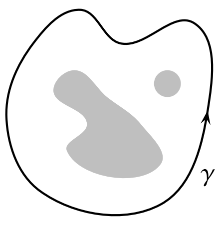
wobei $\partial K_r(z_0)$ der mathematisch positiv orientierte Rand von $K_r(z_0)$ ist.
Allgemeiner gilt: Ist γ ein geschlossener Weg in $\Omega \setminus \{z_0\}$ und $\nu(z_0, \gamma)$ die Umlaufszahl von γ um z_0, so gilt

$$f^{(n)}(z_0)\nu(z_0, \gamma) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta.$$

Funktionalkalkül von Dunford. Es sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ ein linearer Operator auf X. Dann ist die Abbildung $\rho(A) \to \mathscr{L}(X),\ \ \lambda \to R(\lambda, A)$ holomorph. Ist A ein überall definierter beschränkter Operator, so ist auch $\sigma(A)$ beschränkt. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\sigma(A) \subseteq \Omega$ und γ ein geschlossener Weg, der ganz in Ω verläuft und jeden Punkt in $\sigma(A)$ genau einmal mathematisch positiv orientiert umläuft. Dann definiert man für holomorphes $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$f(A) \ = \ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta) R(\zeta, A) \,\mathrm{d}\zeta.$$

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl von γ.



Beispiele:

i) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=1$, dann ist $f(A)=\mathrm{id}$.

Beweis. Für beliebiges $y\in X'$ ist die Abbildung $z\mapsto\langle(z-A)^{-1}x\,,y\rangle$ holomorph in $\rho(A)$. Ohne Einschränkung (Homotopieinvarianz) ist $\gamma = K_r(0)$ mit genügend großem r. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\langle f(A)x\,,y\rangle &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\langle\int_\gamma R(\zeta,A)x\,\mathrm{d}\zeta\,,y\right\rangle = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\langle\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\Big(1-\frac{1}{\zeta}R(\zeta,A)\Big)^{-1}x\,\mathrm{d}\zeta\,,y\right\rangle\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\langle\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n}A^n x}_{\text{konvergiert glm. für }\zeta\in\gamma}\,\mathrm{d}\zeta\,,y\right\rangle = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\langle\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\int_\gamma \zeta^{-n-1}A^n x\,\mathrm{d}\zeta}_{\substack{=0,\text{ falls } n\geq 1\\ =2\pi\mathrm{i},\text{ falls } n=0}}\,,y\right\rangle\\
&= \langle x\,,y\rangle,
\end{aligned}$$

also $\langle f(A)x-x\,,y\rangle = 0$, $y\in X'$. Der Satz von Hahn-Banach liefert also $f(A)x-x=0$, $x\in X$.

ii) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z$, dann ist $f(A)=A$.

iii) Für die Exponentialfunktion $\exp(tA)$ wie in Definition 2.8 ist

$$\exp(tA) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \mathrm{e}^{t\zeta}\,R(\zeta,A)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Bei unbeschränkten Operatoren ist das Spektrum im allgemeinen unbeschränkt, daher kann der Funktionalkalkül nicht auf unbeschränkte Operatoren verallgemeinert werden. Für sektorielle Operatoren gibt es eine Integraldarstellung der erzeugten Halbgruppe.

Für $\varphi\in(0,\pi]$ definiere den (offenen) Sektor

$$\Sigma_\varphi := \{z\in\mathbb{C} : |\arg z|<\varphi\}\setminus\{0\}.$$

3.1 Definition. Es sei X ein Banachraum. Ein dicht definierter Operator $A\in\mathscr{L}(X)$ heißt *sektoriell mit Winkel* δ, falls es ein $\delta\in(0,\pi/2]$ gibt, so daß

$$\Sigma_{\pi/2+\delta}\subseteq\rho(A),$$

und zu jedem $\varepsilon\in(0,\delta)$ ein $M_\varepsilon\geq 0$ existiert, so daß

$$\|R(\lambda,A)\|\leq\frac{C_\varepsilon}{|\lambda|},\qquad \lambda\in\overline{\Sigma_{\pi/2+\delta-\varepsilon}}\setminus\{0\}. \tag{3.1}$$

3.2 Definition. Es sei X ein Banachraum und $A\in\mathscr{L}(X)$ ein sektorieller Operator mit Winkel $\delta\in(0,\pi/2]$. Setze $T(0)=\mathrm{id}$. Für $z\in\Sigma_\delta$ wähle $\delta'\in(|\arg(z)|,\delta)$ beliebig und definiere

$$T(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \mathrm{e}^{\mu z}\,R(\mu,A)\,\mathrm{d}\mu, \tag{3.2}$$

wobei γ ein beliebiger stückweise glatter Weg in $\Sigma_{\pi/2+\delta}$ von $\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'}$ nach $\infty\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'}$, siehe Abbildung 3.2.

Die Bedingung $z\in\Sigma_\delta$ stellt sicher, daß $\arg(\mu z)\in(\pi/2+\varepsilon,\ 3\pi/2-\varepsilon)$ für genügend kleines $\varepsilon>0$, so daß also $\mathrm{Re}(\mu z)<\alpha<0$ für ein festes α und alle $\mu\in\gamma$ mit $|\mu|$ groß genug. Folglich fällt die Norm des Integranden exponentiell ab und das Integral ist wohldefiniert. Genauer gilt:

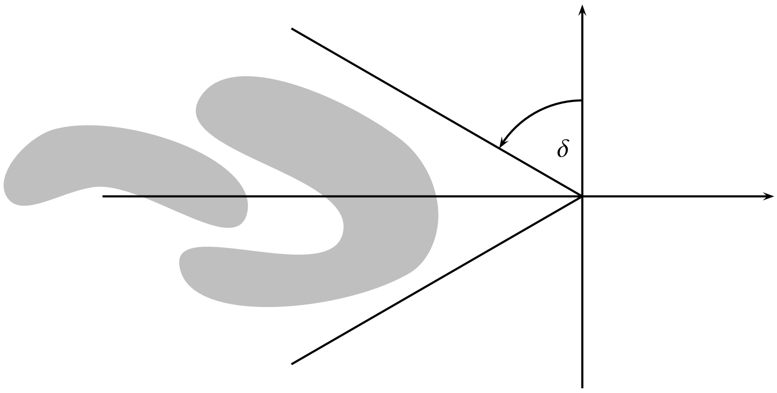


ABBILDUNG 3.1: Spektrum eines sektoriellen Operators.

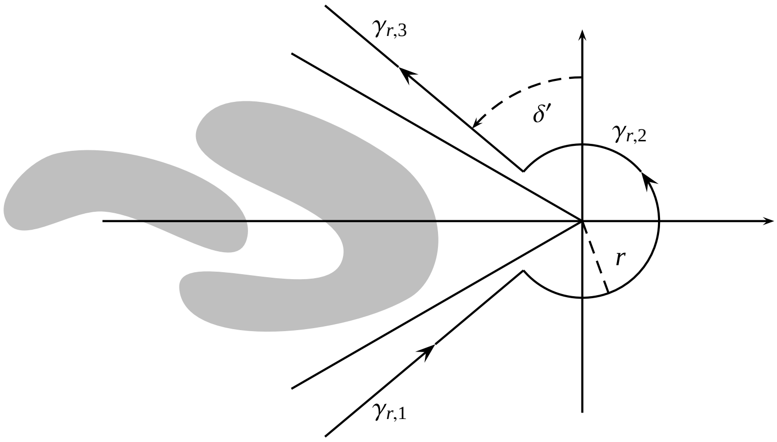


ABBILDUNG 3.2: Integrationsweg $\gamma_{r,\delta'}$.

3.3 Proposition. *Ist X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ ein sektorieller Operator mit Winkel $\delta \in (0, \pi/2]$. Dann ist durch (3.1) ein beschränkter linearer Operator definiert und es gilt:*

i) $\|T(z)\|$ *ist gleichmäßig beschränkt in für $z \in \Sigma_{\delta'}$ für jedes $\delta' \in (0, \delta)$.*

ii) *Die Abbildung $z \mapsto T(z)$ ist analytisch.*

iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \quad z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$.

iv) *Die Abbildung $z \mapsto T(z)$ ist stark stetig in $\Sigma_{\delta'} \cup \{0\}$ für jedes $\delta' \in (0, \delta)$.*

v) $(T(t))_{t\geq 0}$ *ist eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A.*

3.4 Definition. Es sei $\delta \in (0, \pi/2]$. Eine Familie $\mathcal{T} = (T(z))_{z\in\Sigma_\delta} \subseteq L(X)$ heißt eine *analytische Halbgruppe mit Winkel δ,* falls gilt:

i) $T(0) = \mathrm{id}$ und $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \; z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$;

ii) $z \mapsto T(z)$ ist analytisch in Σ_δ;

iii) $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\delta'}}} T(z)x = x, \; \delta' \in (0, \delta), x \in X$ (starke Stetigkeit in Sektoren $\Sigma_{\delta'}$).

Gilt außerdem noch

iv) für jedes $\delta' \in (0,\delta)$ gibt es ein $M_{\delta'}$, so daß $\|T(z)\| \le M_{\delta'},\ z \in \Sigma_{\delta'}$,

so nennt man $\mathcal{T}$ eine beschränkte analytische Halbgruppe.

Bemerkung. Für eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge 0}$ mit Erzeuger A sind die Abbildungen $[0,\infty) \to X,\ t \mapsto T(t)x$ für jedes $x \in \mathcal{D}(A)$ differenzierbar. Ist $\mathcal{T}$ eine analytische Halbgruppe mit Winkel δ, so ist $T(\cdot)$ in in jedem Sektor $\Sigma_{\delta'}$ mit $0 < \delta' < \delta$ normdifferenzierbar.

Bemerkung. Ist $\mathcal{T}$ eine analytische Halbgruppe und ihre Einschränkung auf reelle t eine beschränkte stark stetige Halbgruppe, so folgt nicht, daß auch $\mathcal{T}$ eine beschränkte analytische Halbgruppe ist. Beispielsweise ist die Multiplikationshalbgruppe $(\mathrm{e}^{iz})_{z\in\mathbb{C}}$ auf $X = \mathbb{C}$ eine nicht beschränkte analytische Halbgruppe, deren Einschränkung $(\mathrm{e}^{it})_{t\ge 0}$ auf $\mathbb{R}_+$ eine beschränkte Halbgruppe ist.

Beweis von Proposition 3.3. Wohldefiniertheit von $T(z)$ und i): Es seien $\delta \in (0,\delta)'$ und $z \in \Sigma_{\delta'}$ gegeben. Da der Integrand in (3.1) analytisch ist, ist das Integral unabhängig vom gewählten Weg γ, falls das Integral existiert. Setze $r = |z|^{-1}$, $\varepsilon = (\delta - \delta')/2$ und wähle den Weg $\gamma = \gamma_{r,\delta-\varepsilon} = \gamma^1_{r,\delta-\varepsilon} \cup \gamma^2_{r,\delta-\varepsilon} \cup \gamma^3_{r,\delta-\varepsilon}$ (siehe Abbildung 3.2) mit

$$\begin{aligned}
\gamma^1_{r,\delta-\varepsilon} &= \{s\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi/2+\delta-\varepsilon)} \ :\ s \in (-\infty,\ r)\},\\
\gamma^3_{r,\delta-\varepsilon} &= \{s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2+\delta-\varepsilon)} \ :\ s \in (r,\ \infty)\},\\
\gamma^2_{r,\delta-\varepsilon} &= \{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \ :\ s \in (-(\pi/2+\delta-\varepsilon),\ (\pi/2+\delta-\varepsilon))\}.
\end{aligned}$$

Für $\mu \in \gamma^3_{r,\delta-\varepsilon}$ ist $\arg(\mu z) = \arg(\mu) + \arg(z) \in (\pi/2+\varepsilon,\ 3\pi/2-\varepsilon)$. Da $\cos(\varphi) \le \cos(\pi/2+\varepsilon) = -\sin\varepsilon < 0$, $\varphi \in (\pi/2+\varepsilon,\ 3\pi/2-\varepsilon)$, folgt

$$\operatorname{Re}(\mu z) = |\mu z| \cos(\arg(\mu z)) \le -|\mu z| \sin\varepsilon. \tag{3.3}$$

Man rechnet leicht nach, daß (3.2) auch für $\mu \in \gamma^1_{r,\delta-\varepsilon}$ gilt. Für $\mu \in \gamma^2_{r,\delta-\varepsilon}$ findet man

$$\operatorname{Re}(\mu z) \le |\mu z| = 1.$$

Mit der Abschätzung für die Resolvente erhält man also

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{\mu z} R(\mu,A)\| &\le \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\mu z)} \|R(\mu,A)\| \le \frac{C_\varepsilon}{|\mu|}\,\mathrm{e}^{-|\mu z|\sin\varepsilon}, && \mu \in \gamma^1_{r,\delta-\varepsilon} \cup \gamma_{r\,\delta-\varepsilon}3,\\
\|\mathrm{e}^{\mu z} R(\mu,A)\| &\le \mathrm{e}\,\frac{C_\varepsilon}{|\mu|} \le \mathrm{e}\,|z|C, && \mu \in \gamma_{r\,\delta-\varepsilon}2.
\end{aligned}$$

Für das Integral erhält man also

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu z} R(\mu,A)\,\mathrm{d}\mu \right\| &\le \int_\gamma \|\mathrm{e}^{\mu z} R(\mu,A)\|\,\mathrm{d}\mu\\
&\le 2\int_r^\infty \left\| \mathrm{e}^{-s|z|\sin\varepsilon}\,\frac{C_\varepsilon}{s} \right\| \mathrm{d}s + \int_{-(\pi/2+\delta-\varepsilon)}^{\pi/2+\delta-\varepsilon} \mathrm{e}\,|z|C_\varepsilon|\mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}|\,\mathrm{d}s\\
&= 2\int_1^\infty \left\| \mathrm{e}^{-s\sin\varepsilon}\,\frac{C_\varepsilon}{s} \right\| \mathrm{d}s + 2(\pi/2+\delta-\varepsilon)\,\mathrm{e}\,C_\varepsilon < \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $T(z)$ wohldefiniert und in $\Sigma_{\delta'}$ gleichmäßig beschränkt, weil die rechte Seite nicht von $z \in \Sigma_{\delta'}$ abhängt.

ii) Der Integrand in (3.1) ist analytisch und wie in i) kann gezeigt werden, daß die Integrale über die Ableitungen existieren.

iii) Es seien $\delta' \in (0, \delta)$ und $z_1,\ z_2 \in \Sigma_{\delta'}$. Wähle $\gamma = \gamma_{1,\delta'+\varepsilon}$ mit $\varepsilon = (\delta - \delta')/2$ wie oben und setze $\gamma' = \gamma + c$ mit $c > 0$ so groß, daß $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$. Dann folgt mit der Resolventengleichung $R(\mu, A)R(\lambda, A) = (\lambda - \mu)^{-1}[R(\mu, A) - R(\lambda, A)]$:

$$\begin{aligned}
T(z_1)T(z_2) &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_\gamma \int_{\gamma'} \mathrm{e}^{\mu z_1}\,\mathrm{e}^{\lambda z_2}\, R(\mu, A)R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_\gamma \int_{\gamma'} \mathrm{e}^{\mu z_1}\,\mathrm{e}^{\lambda z_2} (\lambda - \mu)^{-1}[R(\mu, A) - R(\lambda, A)]\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu z_1}\, R(\mu, A) \int_{\gamma'} (\mu - \lambda)^{-1}\,\mathrm{e}^{\lambda z_2}\ \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\gamma'} \mathrm{e}^{\lambda z_2}\, R(\lambda, A) \int_\gamma (\mu - \lambda)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mu z_1}\ \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu z_2}\, R(\mu, A)\,\mathrm{e}^{\mu z_1}\ \mathrm{d}\mu\ = T(z_1 + z_2),
\end{aligned}$$

da $\int_{\gamma'} (\mu - \lambda)^{-1}\,\mathrm{e}^{\lambda z_2}\, R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda = 2\pi \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mu z_2}$ und $\int_\gamma (\mu - \lambda)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mu z_1}\ \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda = 0$ nach dem Cauchyschen Integralsatz (wenn man die Integrationswege "links im Unendlichen" mit Kreisbögen schließt).

iv) Es sei wieder $\delta' \in (0, \delta)$ und $\varepsilon = (\delta - \delta')/2$. Wegen i), ii) und weil A dicht definiert ist, genügt es, die starke Stetigkeit in 0 zu zeigen, d. h.,

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\delta'}}} T(z)x - x = 0, \qquad x \in \mathcal{D}(A).$$

Wähle wieder $\gamma = \gamma_{1,\delta'+\varepsilon}$ wie oben. Cauchys Integralformel liefert

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\mu z}}{\mu}\,\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^0 = 1,$$

also ist

$$T(z)x - x = \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu z} \left(R(A, \mu) - \frac{1}{\mu} \right) x\,\mathrm{d}\mu = \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu z}\,\mu^{-1} R(A, \mu)Ax\,\mathrm{d}\mu.$$

Die Norm des Integranden kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\|\mu^{-1}\,\mathrm{e}^{\mu z}\, R(A, \mu)Ax\| \le \begin{cases} |\mu|^{-2} C_\varepsilon\,\mathrm{e}^{-|\mu z|\sin\varepsilon}, & \mu \in \gamma^1_{1,\delta-\varepsilon} \cup \gamma^3_{1,\delta-\varepsilon}, \\ |\mu|^{-2}\,\mathrm{e}\, C_\varepsilon, & \mu \in \gamma^2_{1,\delta-\varepsilon}. \end{cases}$$

Der Integrand ist also durch eine integrierbare Funktion beschränkt, daher liefert Lebesgues Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\delta'}}} T(z)x - x = \int_\gamma \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\delta'}}} \mathrm{e}^{\mu z}\,\mu^{-1} R(A, \mu)Ax\,\mathrm{d}\mu = \int_\gamma \mu^{-1} R(A, \mu)Ax\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Die letzte Gleichheit folgt wieder aus dem Cauchyschen Integralsatz, wenn man den Integrationsweg γ rechts schließt.

v) Aus iv) folgt, daß $(T(t))_{t\ge 0}$ eine stark stetige Halbgruppe ist. Es sei B der Erzeuger von $(T(t))_{t\ge 0}$. Ist ω_0 die Wachstumsschranke von $(T(t))_{t\ge 0}$, so ist offensichtlich $\lambda = \omega_0 + 2 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Zum Beweis von $A = B$ zeigen wir $R(\lambda, A) = R(\lambda, B)$. Nach Satz 2.25 gilt

$$R(\lambda, B) = \lim_{t_0\to\infty} \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s)x\,\mathrm{d}s.$$

Für $t_0 > 0$ und dem Weg $\gamma = \gamma_1$ wie oben folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s)x \,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{t_0} \int_\gamma \mathrm{e}^{-\lambda s}\, \mathrm{e}^{\mu s}\, R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}s \\ &= \int_\gamma \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-\lambda s}\, \mathrm{e}^{\mu s}\, R(\mu, A)x \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\mu - \lambda)^{-1} (\mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t_0} - 1) R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{t_0 \to \infty} R(\lambda, A)x,\end{aligned}$$

denn (wieder Cauchys Integralsatz, rechts schließen)

$$\int_\gamma (\mu - \lambda)^{-1} R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu = R(\lambda, A),$$

und wegen $\mathrm{Re}(\mu - \lambda) < 0$

$$\left\| \int_\gamma (\mu - \lambda)^{-1}\, \mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t_0}\, R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \mathrm{e}^{-t_0}\, \|x\| \int_\gamma |\mu - \lambda|^{-1} \frac{C_\varepsilon}{|\mu|}\, |\mathrm{d}\mu| \longrightarrow 0, \quad t_0 \to \infty. \qquad \square$$

3.5 Beispiel. Ist H ein Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert und dissipativ, dann ist A sektoriell mit beliebigem Winkel $\delta \in (0, \pi/2)$. Insbesondere erzeugt A eine analytische Halbgruppe vom Winkel $\delta \in (0, \pi/2)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $W(A) \subset (-\infty, 0]$ (weil A sektoriell ist), folglich ist $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \subset \rho(A)$ (da A selbstadjungiert ist und der Defektindex auf Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$ konstant ist). Es sei $\delta \in (0, \pi/2)$ beliebig. Es ist noch die Resolventenabschätzung (3.1) für $\lambda \in \Sigma_{\pi/2+\delta}$ zu zeigen. Da $\lambda \in \Sigma_{\pi/2+\delta}$, gibt es $\rho > 0$ und $\vartheta \in (-\pi/2-\delta,\ \pi/2+\delta)$, so daß $\lambda = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$. Für $x \in H$ setze $u = R(\lambda, A)x$, also $\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\, u - Au = x$. Multiplikation mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2}$ und Skalarmultiplikation mit u liefert

$$\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta/2}\, \|u\|^2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2}(Au\,, u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2}(x\,, u).$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Realteil, so folgt

$$\rho \|u\|^2 \underbrace{\cos(\vartheta/2)}_{\in(\cos(\delta/2),1)} - \underbrace{(Au\,, u)\cos(\vartheta/2)}_{\leq 0} = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2}(x\,, u)) \leq \|x\|\, \|u\|$$

$$\Longrightarrow \qquad \|R(\lambda, A)x\| = \|u\| \leq \frac{\|x\|}{\rho \cos(\delta/2)} = \frac{\|x\|}{|\lambda| \cos(\delta/2)}. \qquad \square$$

3.6 Beispiel.
- $X = \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$, $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $Af = f''$, $f \in \mathcal{D}(A) = W^{2,2}(\mathbb{R})$. Dann erzeugt A eine analytische Halbgruppe auf $\mathscr{L}_2(\mathbb{R})$.
- Translationshalbgruppe: $X = \mathscr{L}_p(\mathbb{R})$, $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ mit $T(t)f = f(t + \cdot)$ ist keine analytische Halbgruppe, denn der Erzeuger A von $\mathcal{T}$ ist $Af = f'$, $f \in \mathcal{D}(A) = W^{1,p}(\mathbb{R})$. Da $\sigma(A) = \mathrm{i}\mathbb{R}$ ist A nicht sektoriell (siehe Proposition 3.8).

3.7 Bemerkung. Ist X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(z))_{z\in\Sigma_\delta}$ eine beschränkte analytische Halbgruppe auf X mit Erzeuger A, so gilt

i) $t > 0,\ k \in \mathbb{N},\ x \in X \implies T(t)x \in \mathcal{D}(A^k)$ und $A^k T(t)x = (AT(t/k))^k x$,
   $t > 0,\ k \in \mathbb{N},\ x \in \mathcal{D}(A^k) \implies A^k T(t)x = T(t)A^k$.

ii) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $(0, \infty) \to X,\ t \mapsto T(t)x$ beliebig oft differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\, T(t)x = A^k T(t)x, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. i) Es sei $t > 0$ und $\delta' \in (0, \delta)$. Nach Voraussetzung ist T im Sektor $\Sigma_{\delta'}$ in norm-differenzierbar, also existiert der Grenzwert für $h \to 0$ von

$$\frac{1}{h}\left(T(t+h) - T(t)\right) x = \frac{1}{h}\left(T(h) - \mathrm{id}\right) T(t)x = T(t)\,\frac{1}{h}\left(T(h) - \mathrm{id}\right) x$$

und es folgt $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ mit $AT(t) = \lim_{h\to\infty} h^{-1}(T(t+h)x - T(t)x) = T(t)Ax$.
Wegen

$$AT(t)x = AT(t/2)T(t/2)x = T(t/2)AT(t/2)x \in \mathcal{D}(A)$$

folgt $T(t)x \in \mathcal{D}(A^2)$ und $A^2T(t)x = (AT(t/2))^2x$, $x \in X$, $t > 0$. Die Behauptung folgt jetzt induktiv.
ii) Es sei $\varepsilon \in (0,\ t/(2k))$. Nach i) ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\, T(t)x \;&=\; \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}\, AT(t)x \;=\; \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}\, T(t-\varepsilon)A\underbrace{T(\varepsilon)x}_{\mathcal{D}(A)} \;=\; \ldots \;=\; T(t-k\varepsilon)(AT(\varepsilon))^k x\\ &=\; T(t-k\varepsilon)A^kT(k\varepsilon)x \;=\; A^kT(t)x. \qquad\square\end{aligned}$$

3.8 Proposition (Charakterisierung analytischer Halbgruppen). *Es sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$. Dann sind äquivalent:*

i) *A ist sektoriell.*

ii) *A erzeugt eine beschränkte analytische Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ auf X.*

iii) *A erzeugt eine beschränkte stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ auf X, $\mathrm{rg}(T(t)) \subseteq \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$, und*

$$C = \sup\{\, \|tAT(t)\| \;:\; t > 0 \,\} < \infty.$$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Proposition 3.3.

ii) $\Rightarrow$ i) Es sei $\delta \in (0, \pi/2]$ der Winkel von $\mathcal{T}$. Nach Voraussetzung ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A. Es ist zu zeigen, daß A sektoriell mit Winkel δ ist.
Wähle $\alpha \in (-\delta, \delta)$ und setze

$$T_\alpha(t) = T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\, t), \qquad t \geq 0.$$

Offensichtlich ist $\mathcal{T}_\alpha = (T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X. Es sei A_α der Erzeuger von $\mathcal{T}_\alpha$. Wir zeigen $A_\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} A$. Setze $\gamma_\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\gamma$. Für $x \in X$ folgt mit Satz 2.25 und Cauchys Integralsatz

$$\begin{aligned}R(1, A)x &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, T(t)x\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_\alpha} \mathrm{e}^{-\mu}\, T(\mu)x\,\mathrm{d}\mu = \int_{\gamma_\alpha} \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\, T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\, t)x\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\, T_\alpha(t)x\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\, R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, A)x,\end{aligned}$$

also ist $x \in \mathcal{D}(A_\alpha)$ genau dann, wenn $x \in \mathcal{D}(A)$, und in dem Fall ist $A_\alpha x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} Ax$.
Da A_α Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist, folgt $\{\lambda \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(\lambda) > 0\} \subseteq \rho(A_\alpha) = \rho(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} A) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\rho(A)$. Damit folgt also

$$\rho(A) \;\supset \bigcup_{\alpha\in(-\delta,\,\delta)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\{\, \lambda \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \,\} \;=\; \{\, \lambda \in \mathbb{C} \;:\; |\arg(\lambda)| < \pi/2 + \delta \,\} \;=\; \Sigma_{\pi/2+\delta}.$$

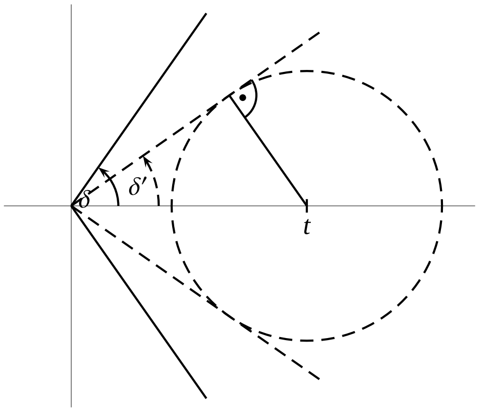
Es ist noch die Resolventenabschätzung (3.1) zu zeigen. Wähle $\delta' \in (0, \delta)$. Da $\mathcal{T}$ eine beschränkte Halbgruppe ist, gibt es ein $M \geq 0$, so daß $\|T(z)\| \leq M_{\delta'}$, $z \in \Sigma_{\delta'}$. Damit folgt aus dem Satz von Hille-Yosida-Phillips (Satz 2.28)

$$\|R(\lambda, A_\alpha)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda)}, \qquad \operatorname{Re}(\lambda) > 0.$$

Ist nun $\lambda \in \overline{\Sigma_{\pi/2+\delta'}} \setminus \{0\}$, dann gibt es $\rho > 0$ und $\alpha \in (-\delta', \delta')$, so daß $\lambda = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Es folgt

$$\|R(\lambda, A)\| = \|R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\lambda,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}A)\| = \|R(\rho,\ A_\alpha)\| \leq \frac{M_{\delta'}}{\rho} = \frac{M_{\delta'}}{|\lambda|}.$$

Weil $M_{\delta'}$ nur von δ' abhängt, ist die Behauptung gezeigt.



ii) ⇒ iii) Nach Voraussetzung ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Da $\mathcal{T}$ in jedem Sektor $\Sigma_{\delta'}$ mit $\delta' \in (0, \delta)$ normdifferenzierbar ist, existiert für jedes $t > 0$ der Limes

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(T(t+h)x - T(t)x) = \lim_{h\to 0} h^{-1}(T(h) - \mathrm{id}\,)T(t)x,$$

also folgt $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$. Definiere den Weg $\gamma_{r,\delta'}$ wie im Beweis von Proposition 3.3. Da A abgeschlossen ist und, wie sich zeigen wird, $\int_{\gamma_{r,\delta'}} A\,\mathrm{e}^{t\mu} R(\mu, A)\,\mathrm{d}\mu$ existiert, folgt wie in Proposition 3.3:

$$\begin{aligned}
\|AT(t)\| &= \left\| \int_{\gamma_{t^{-1},\delta'}} A\,\mathrm{e}^{t\mu} R(\mu, A)\,\mathrm{d}\mu \right\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\gamma_{t^{-1},\delta'}} \mathrm{e}^{t\mu} \Big(\mu R(\mu, A) - 1\Big)\,\mathrm{d}\mu \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{t^{-1}}^{\infty} \mathrm{e}^{ts\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'}} \Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'} sR(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'} s,\ A) - 1\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'}\ \mathrm{d}s \right. \\
&\qquad + \int_{\infty}^{t^{-1}} \mathrm{e}^{ts\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'}} \Big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'} sR(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'} s,\ A) - 1\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'}\ \mathrm{d}s \\
&\qquad \left. + \int_{-\delta'}^{\delta'} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}} \Big(t^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} R(t^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}s},\ A) - 1\Big) \frac{\mathrm{i}}{t}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\ \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left\| \int_{t^{-1}}^{\infty} \mathrm{e}^{ts\cos\delta'} \Big(s\frac{M}{s} + 1\Big)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta'}^{\delta'} \mathrm{e}\Big(t^{-1}\frac{M}{t^{-1}} + 1\Big)t^{-1}\,\mathrm{d}s \right\| \\
&= \frac{1}{t}\,\frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{s\cos\delta'} \Big(M + 1\Big)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta'}^{\delta'} \mathrm{e}\Big(M+1\Big)\,\mathrm{d}s = \frac{C}{t},
\end{aligned}$$

mit einem von t unabhängigen $C < \infty$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Es sei $x \in X$. Nach Bemerkung 3.7 ist $(0,\infty) \to X$, $s \mapsto T(s)x$ beliebig oft differenzierbar und $\operatorname{rg}(T(s)) \subseteq \mathcal{D}(A^\infty) = \cap_{k=1}^\infty \mathcal{D}(A^k)$ für jedes $s > 0$.
Weiter folgt aus der Bemerkung 3.7 und der Ungleichung $k^k \le \mathrm{e}^k\, k!$, daß

$$\frac{1}{k!}\left\|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}T(s)\right\| = \frac{1}{k!}\left\|A^kT(s)\right\| = \frac{1}{k!}\left\|(AT(s/k))^k\right\| \le \frac{k^k}{s^k k!}\ \|s/k(AT(s/k))\|^k \le \frac{C^k\,\mathrm{e}^k}{s^k}.$$

Für $t > 0$ und $|h| \in (0,t)$ liefert die Taylorentwicklung

$$T(t+h)x = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}T^{(k)}(t)x + \frac{1}{n!}\int_t^{t+h}(t+h-s)^nT^{(n+1)}(s)x\,\mathrm{d}s. =: \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}T^{(k)}(t)x + R_{n+1}(h)$$

Der Integralterm $R_{n+1}(h)$ läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\|R_{n+1}(h)\| \;\le\; \frac{\|x\|}{n!}\int_t^{t+h}|t+h-s|^n(n+1)!\left(\frac{C\,\mathrm{e}}{s}\right)^k\,\mathrm{d}s \;\le\; (n+1)\left(\frac{|h|\,C\,\mathrm{e}}{t-|h|}\right)^{n+1}.$$

Für $q \in (0,1)$ und $|h| < \frac{qt}{Ce+1}$ ist

$$|h|\,\frac{C\,\mathrm{e}}{t-|h|} \;\le\; \frac{qtC\,\mathrm{e}}{(C\,\mathrm{e}+1)(t-\frac{qt}{C\,\mathrm{e}+1})} \;=\; \frac{qC\,\mathrm{e}}{Ce+1-q} \;\le\; q,$$

also

$$\|R_{n+1}(h)\| \;\le\; (n+1)q^{n+1} \;\longrightarrow\; 0, \quad n\to\infty.$$

Man hat also für $T(\cdot)$ die Taylorentwicklung

$$T(t+h)x = \sum_{k=0}^\infty \frac{h^k}{k!}T^{(k)}(t)x, \quad |h| < \frac{qt}{C\,\mathrm{e}+1}.$$

Die Reihe konvergiert auch für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \frac{qt}{C\,\mathrm{e}+1}$, also hat T eine analytische Fortsetzung auf Σ_δ mit $\delta = \arctan\frac{1}{C\,\mathrm{e}+1}$.
Es bleibt zu zeigen, daß die Fortsetzung in jedem Sektor $\Sigma_{\delta'}$ mit $\delta' \in (0,\delta)$ beschränkt ist.
Ist $z \in \Sigma_{\delta'}$, so ist $|\operatorname{Im} z| \le t\tan\delta' \le \frac{tq}{C\,\mathrm{e}+1}$, folglich

$$\begin{aligned}\|T(z)\| \;&=\; \|T(\operatorname{Re} z + \mathrm{i}\operatorname{Im} z)\| \;\le\; \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\|T^{(k)}(\operatorname{Re} z)\|\,|\operatorname{Im} z|^k \;\le\; \sum_{k=0}^\infty\left(\frac{C\,\mathrm{e}}{t}\right)^k\left(\frac{qt}{C\,\mathrm{e}+1}\right)^k\\ &\le\; \sum_{k=0}^\infty q^k \;=\; (1-q)^{-1}.\end{aligned}$$

□

3.9 Nicht dicht definierte Erzeuger. In Proposition 3.3 wurde die Tatsache, daß A dicht definiert ist, nur in benutzt, um zu zeigen, daß die erzeugte Halbgruppe $\mathcal{T}$ stark stetig ist. Ist nicht vorausgesetzt, daß A dicht definiert ist, so erhält in Proposition 3.3 statt iv):

iv') Für jedes $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ ist die Abbildung $z \mapsto T(z)x$ stetig in $\Sigma_{\delta'} \cup \{0\}$ für jedes $\delta' \in (0,\delta)$.

Genauer gilt:

Proposition. *Es sei X ein Banachraum, $A \in \mathscr{L}(X)$ und $\delta \in (0,\pi/2]$ mit $\Sigma_{\pi/2+\delta} \in \rho(A)$ und es gebe zu jedem $\varepsilon \in (0,\delta)$ ein C_ε, so daß*

$$\|R(\lambda,A)\| \le \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \overline{\Sigma_{\pi/2+\delta-\varepsilon}} \setminus \{0\}.$$

Dann gelten die Aussagen i)–iii) *aus Proposition 3.3. Weiter gilt:*

i) *(a)* $x \in \overline{\mathcal{D}(A)} \implies \lim_{t\to 0} T(t)x = x$,

(b) Falls der Grenzwert $y = \lim_{t\to 0} T(t)x$ *existiert, so folgt* $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ *und* $y = x$.

ii) *(a)* $x \in X,\ t \geq 0 \implies \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A)$ *und* $A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = T(t)x - x$.

(b) Falls für ein $\varepsilon > 0$ *die Funktion* $s \mapsto AT(s)x$ *in* $(0,\varepsilon)$ *integrierbar ist, so folgt*

$$A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = \int_0^t AT(s)x\,\mathrm{d}s.$$

iii) *(a)* $x \in \mathcal{D}(A),\ Ax \in \overline{\mathcal{D}(A)} \implies \lim_{t\to 0} t^{-1}\big(T(t)x - x\big) = Ax$,

(b) Falls der Grenzwert $y = \lim_{t\to 0} t^{-1}\big(T(t)x - x\big)$, *existiert, so folgt* $x \in \mathcal{D}(A),\ Ax \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ *und* $y = Ax$.

iv) $x \in \mathcal{D}(A),\ Ax \in \overline{\mathcal{D}(A)} \implies \lim_{t\to 0} AT(t)x = Ax$.

Beweis. i) (a) wurde schon in Proposition 3.3 iv) gezeigt. Es seien $x,\ y$ wie in (b) gegeben. Da $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, $t > 0$, und $y = \lim_{t\searrow 0} T(t)x$, folgt $y \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Es sei nun $\lambda \in \rho(A)$ gegeben. Dann folgt mit (a)

$$R(\lambda,A)y = \lim_{t\searrow 0} R(\lambda,A)T(t)x = \lim_{t\searrow 0} T(t)\underbrace{R(\lambda,A)x}_{\in\mathcal{D}(A)} = R(\lambda,A)x.$$

ii) (a) Es sei $\lambda \in \rho(A)$, $x \in X$ und $t > 0$ gegeben. Für $\varepsilon \in (0,t)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^t T(s)x\,\mathrm{d}s &= \int_\varepsilon^t (\lambda - A)R(\lambda,A)T(s)x\,\mathrm{d}s = \lambda\int_\varepsilon^t R(\lambda,A)T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_\varepsilon^t AR(\lambda,A)T(s)x\,\mathrm{d}s\\ &= \lambda\int_\varepsilon^t R(\lambda,A)T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_\varepsilon^t \frac{d}{ds}T(s)R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}s\\ &= \lambda\int_\varepsilon^t T(s)R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}s - T(t)R(\lambda,A)x + T(\varepsilon)R(\lambda,A)x.\end{aligned}$$

Also existiert der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s &= \lambda\int_0^t T(s)R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}s - R(\lambda,A)T(t)x + R(\lambda,A)T(0)x\\ &= \lambda R(\lambda,A)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s - R(\lambda,A)\big(T(t)x - x\big) \ \in \mathcal{D}(A).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus

$$R(\lambda,A)A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = (\lambda R(\lambda,A) - 1)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = R(\lambda,A)(T(t)x - x)$$

(b) Es sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Angenommen, $s \mapsto T(s)x$ ist integrierbar in $(0,\varepsilon)$. Dann ist auch $s \mapsto \|T(s)x\|$ integrierbar in $(0,\varepsilon)$ und daher auch $s \mapsto T(s)x$ uneigentlich integrierbar in $(0,t)$. Die Behauptung folgt somit aus (1.4).

iii) (a) Aus ii) folgt

$$\begin{aligned}t^{-1}\big(T(t)x - x\big) = t^{-1}A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s &= t^{-1}\int_0^t AT(s)x\,\mathrm{d}s\\ &= t^{-1}\int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s \xrightarrow{t\to 0} T(0)Ax = Ax,\end{aligned}$$

denn der Integrand $T(\cdot)x$ ist stetig in $[0,t]$ nach i), weil $Ax \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

(b) Es sei $x \in X$, so daß der Grenzwert $y = \lim_{t\to 0} t^{-1}\big(T(t)x - x\big)$ existiert. Dann folgt für $\lambda \in \rho(A)$:

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A)y &= \lim_{t\to 0} t^{-1} R(\lambda, A)(T(t)x - x) = \lim_{t\to 0} t^{-1} R(\lambda, A) A \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \\
&= \lim_{t\to 0} t^{-1}(\lambda R(\lambda, A) - 1) \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = (\lambda R(\lambda, A) - 1) \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \\
&\overset{(*)}{=} (\lambda R(\lambda, A) - 1)x
\end{aligned}$$

also $x \in \mathcal{D}(A)$ und $R(\lambda, A)y = R(\lambda, A)Ax$. In $(*)$ wurde benutzt:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\searrow 0} t^{-1}(T(t)x - x) \text{ existiert } &\implies \lim_{t\searrow} T(t)x = x \implies x \in \overline{\mathcal{D}(A)} \\
&\implies s \mapsto T(s)x \text{ stetig in } [0, t].
\end{aligned}$$

□

Zusammenhang mit Cauchy-Problem. Es sei A wie in der vorherigen Proposition, $\mathcal{T} = (T(z))_{z\in\Sigma_\delta}$ die von A erzeugte analytische Halbgruppe und $x_0 \in X$. Betrachte das Anfangswertproblem

$$x'(t) = Ax(t), \quad t > 0, \qquad x(0) = x_0. \tag{3.4}$$

- $x_0 \in X$ beliebig: Dann ist $z \mapsto T(z)x_0$ analytische Lösung von $x' = Ax$ im offenen Sektor Σ_δ und $T(z)x_0 \in \mathcal{D}(A)$ für alle $z \in \Sigma_\delta$.
- $x_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$: Die Lösung $T(\cdot)x_0$ ist stetig in 0, löst also das Anfangswertproblem (3.4) für $t > 0$.
- $x_0 \in \mathcal{D}(A)$: Die Lösung $T(\cdot)x_0$ ist differenzierbar in 0, löst also das Anfangswertproblem (3.4) für $t \geq 0$.

Bemerkung. Ist $x_0 \in X$ ist nach Definition $T(0)x_0 = x_0$, aber $\lim_{t\searrow 0} T(t)x_0 = x_0$ gilt nur, falls $x_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Es gilt aber immer:

$$\lim_{t\searrow 0} R(\lambda, A)T(t)x_0 = R(\lambda, A)x_0, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Kapitel 4

Asymptotisches Verhalten von Halbgruppen

Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A. Die Wachstumsschranke $\omega_0(\mathcal{T})$ und die Spektralschranke $s(A)$ sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \omega_0(\mathcal{T}) &:= \inf\left\{ \omega \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, M \geq 1 \text{ mit } \|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t\omega},\ t \geq 0 \right\} \\ &= \inf\left\{ \omega \in \mathbb{R} \,:\, \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{t\omega}\, \|T(t)\| = 0 \right\}, \\ s(A) &:= \sup\{\operatorname{Re}(\lambda) \,:\, \lambda \in \sigma(A)\}. \end{aligned}$$

Manchmal schreibt man auch $\omega_0(A)$ oder nur ω_0 statt $\omega_0(\mathcal{T})$.
Ist $\dim X < \infty$, so gilt immer $s(A) = \omega_0(\mathcal{T})$. Im allgemeinen Fall kann man zeigen:

4.1 Proposition. *Für jedes $t_0 > 0$ gilt:*

$$-\infty \;\leq\; s(A) \;\leq\; \omega_0(\mathcal{T}) \;=\; \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \;=\; \frac{1}{t_0} \log r(T(t_0)). \tag{4.1}$$

Dabei ist $r(T(t)) = \lim_{n\to\infty} \|T(t)^n\|^{1/n} = \sup\{\,|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(T(t))\,\}$ der *Spektralradius* von $T(t)$. Insbesondere gilt also $r(T(t)) \leq \|T(t)\|$.

4.2 Definition. Es sei X ein Banachraum. Eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ auf X mit Erzeuger A heißt

i) *gleichmäßig exponentiell stabil* $\iff$ $\exists\, \varepsilon > 0$ so daß $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\varepsilon t}\, \|T(t)\| = 0$;

ii) *gleichmäßig stabil* $\iff$ $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$;

iii) *stark stabil* $\iff$ $\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0,\ x \in X$;

iv) *schwach stabil* $\iff$ $\lim_{t\to\infty} \langle T(t)x\,, x'\rangle = 0,\ x \in X,\ x' \in X'$.

4.3 Lemma. *Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X. Dann sind äquivalent:*

i) *$\mathcal{T}$ ist gleichmäßig exponentiell stabil,*

ii) *$\mathcal{T}$ ist gleichmäßig stabil,*

iii) *es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{t\varepsilon}\, \|T(t)x\| = 0,\ x \in X$.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) und i) $\Rightarrow$ iii) sind klar.

ii) $\Rightarrow$ i) Nach Voraussetzung gibt es ein $t_0 > 0$, so daß $r(T(t_0)) \leq \|T(t_0)\| < 1$. Aus Proposition 4.1 folgt $\omega_0 = t_0^{-1} \log r(T(t_0)) < 0$.

iii) $\Rightarrow$ i) Da $t \mapsto \mathrm{e}^{t\varepsilon} T(t)x$ stetig ist, gibt es zu jedem $x \in X$ ein C_x, so daß $\|\mathrm{e}^{t\varepsilon} T(t)x\| \leq C_x\|x\|$, $t \geq 0$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es also ein $C > 0$, so daß $\|\mathrm{e}^{t\varepsilon} T(t)\| \leq C$, $t \geq 0$. Es folgt die Behauptung, da $\lim_{t\to\infty} \|\mathrm{e}^{t\varepsilon'} T(t)\| = 0$ für jedes $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$. □

Im endlichdimensionalen Fall folgt aus $s(A) < 0$ schon die exponentielle Stabilität der Halbgruppe (das sieht man am besten an der Jordannormalform). Im unendlichdimensionalen Fall gilt das nicht mehr.

4.4 Beispiel. Es seien

$$C_0(\mathbb{R}_+) = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ stetig}, \lim_{s\to\infty} f(s) = 0 \},$$
$$\mathscr{L}_1(\mathbb{R}_+, \mathrm{e}^{\xi}\,\mathrm{d}\xi) = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \,:\, \xi \mapsto \mathrm{e}^{\xi} f(\xi) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}_+) \}.$$

Dann ist $X = C_0(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{L}_1(\mathbb{R}_+, \mathrm{e}^{\xi})$ mit der Norm

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_1 = \sup_{\xi\in\mathbb{R}_+} |f(\xi)| + \int_0^\infty |f(\xi)|\,\mathrm{e}^{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

ein Banachraum. Die Halbgruppe der Linkstranslationen $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$, gegeben durch $T(t)f(\xi) = f(t+\xi)$, $t, \xi \geq 0$, ist stark stetig und hat den Erzeuger A, gegeben durch

$$Af = f', \qquad f \in \mathcal{D}(A) = \{ f \in X \,:\, f \in C^1(\mathbb{R}_+),\ f' \in X \}.$$

Man kann zeigen:

$$s(A) = -1 < 0 = \omega_0(\mathcal{T}).$$

Die Halbgruppe ist also nicht gleichmäßig exponentiell stabil, obwohl $s(A) < 0$.

4.5 Proposition. *Ist X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A, so daß*

$$\sigma(T(t)) \cup \{0\} = \overline{\mathrm{e}^{t\sigma(A)}} \cup \{0\}, \qquad t \geq 0,$$

so gilt $s(A) = \omega_0(\mathcal{T})$.

Beweis. *1. Fall.* Ist $\omega_0(\mathcal{T}) = -\infty$, so folgt aus (4.1), daß auch $s(A) = -\infty$.
2. Fall. Ist $\omega_0(\mathcal{T}) \neq \infty$, folgt für jedes $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\omega_0(\mathcal{T}) &= t^{-1} \log r(T(t)) = t^{-1} \log \sup\{ |\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(T(t)) \} \\
&= t^{-1} \log \sup\{ |\mathrm{e}^{t\mu}| \,:\, \mu \in \sigma(A) \} = t^{-1} \sup\{ \mathrm{Re}(t\mu) \,:\, \mu \in \sigma(A) \} \\
&= \sup\{ \mathrm{Re}(\mu) \,:\, \mu \in \sigma(A) \} = s(A).
\end{aligned}$$
□

4.6 Satz (Satz von Datko-Pazy). *Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Dann sind äquivalent:*

i) *$\mathcal{T}$ ist gleichmäßig exponentiell stabil;*

ii) *es gibt ein $p \in [1, \infty)$, so daß $\int_0^\infty \|T(s)x\|^p\,\mathrm{d}s < \infty$, $x \in X$;*

iii) *für alle $p \in [1, \infty)$ ist $\int_0^\infty \|T(s)x\|^p\,\mathrm{d}s < \infty$, $x \in X$.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ iii) und iii) $\Rightarrow$ ii) ist klar.
ii) $\Rightarrow$ i) Wähle $t \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$S_n : X \to \mathscr{L}_p(\mathbb{R}_+), \qquad S_n x = \chi_{[0,n]}(\cdot)T(\cdot)x.$$

Offensichtlich sind die S_n, $n \in \mathbb{N}$, wohldefiniert. Nach Voraussetzung gibt es $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, so daß

$$\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t\omega}, \quad t \geq 0. \tag{4.2}$$

Daher gilt für Nullfolgen $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X$

$$\|S_n x_m\|_p = \int_0^\infty \|\chi_{[0,n]}(s)T(s)x_m\|^p \mathrm{d}s = \int_0^n \|T(s)x_m\|^p \mathrm{d}s \leq \|x_m\|^p \int_0^n M^p\,\mathrm{e}^{tp\omega}\,\mathrm{d}s \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Also ist jedes S_n beschränkt (weil stetig in Null).
Für festes $x \in X$ ist $\|S_n x\|_p^p = \int_0^\infty \|\chi_{[0,n]}(s)T(s)x\|^p \mathrm{d}s \leq \int_0^\infty \|T(s)X\|^p \mathrm{d}s < \infty$. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es also ein $C \in \mathbb{R}$, unabhängig von t, so daß $\|S_n x\|_p \leq C\|x\|$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, also

$$\int_0^t \|T(s)x\|^p \leq C^p\|x\|^p, \qquad x \in X,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1-\mathrm{e}^{-tp\omega}}{p\omega}\|T(t)x\|^p &= \int_0^t \mathrm{e}^{-sp\omega}\,\|T(t-s)T(s)x\|^p\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t \mathrm{e}^{-sp\omega}\,\|T(t-s)T(s)x\|^p\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \mathrm{e}^{-sp\omega}\,M^p\,\mathrm{e}^{sp\omega}\,\|T(t-s)\|^p\|x\|^p\,\mathrm{d}s \leq M^p\|x\|^p \int_0^t \|T(t-s)\|^p\,\mathrm{d}s \\
&\leq M^pC^p\|x\|^p,
\end{aligned}$$

also

$$\|T(t)x\|^p \leq \frac{M^pC^p(1-\mathrm{e}^{-tp\omega})}{p\omega}\|x\|^p. \tag{4.4}$$

Da $T(\cdot)x$ stetig ist, $\lim_{t\to 0}\|T(t)x\| < \infty$ (wegen (4.2)) und $\lim_{t\to\infty}\|T(t)x\| < \infty$ (wegen (4.4)), gibt es ein $L \in \mathbb{R}$, so daß $\|T(t)x\| \leq L\|x\|^p$, $t \geq 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
t\|T(t)x\|^p &= \int_0^t \|T(t-s)T(s)x\|^p\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t \|T(t-s)T(s)x\|^p\,\mathrm{d}s \leq L^p \int_0^t \|T(s)x\|^p\,\mathrm{d}s \\
&\leq L^pC^p\|x\|^p,
\end{aligned}$$

also

$$\|T(t)\| \leq t^{-1/p}CL \to 0, \qquad t \to \infty. \qquad \square$$

Kapitel 5

Störung stark stetiger Halbgruppen

Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A. Es stellt sich die Frage, wann eine "Störung" von A ebenfalls eine stark stetige Halbgruppe erzeugt.

5.1 Proposition. *Es sei X ein Banachraum, $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A. Weiter seien $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, so daß*

$$\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t\omega}, \quad t \geq 0, \tag{5.1}$$

und $B \in L(X)$ ein beschränkter Operator. Dann erzeugt $C := A + B$ eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ mit

$$\|S(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{t(M\|B\|+\omega)}, \quad t \geq 0. \tag{5.2}$$

Beweis. Ohne Einschränkung kann $\omega = 0$ angenommen werden. (Sonst betrachte den Operator $A - \omega$ und die davon erzeugte stark stetige Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-t\omega}\,T(t))_{t\geq 0}$, siehe Skalierungslemma 2.24.)

1. Fall. $M = 1$, d. h. $\mathcal{T}$ ist eine Kontraktionshalbgruppe. Ist $\lambda > 0$, so folgt $\lambda \in \rho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ (nach dem Satz von Hille-Yosida [Satz 2.28], da $\omega = 0$ und $M = 1$) und es gilt

$$\lambda - C = \lambda - A - B = (\mathrm{id} - B\,R(\lambda, A))(\lambda - A).$$

Ist nun $\lambda > \|B\|$, so folgt $\|BR(\lambda, A)\| \leq \frac{\|B\|}{\lambda} < 1$, also ist $(\mathrm{id} - B\,R(\lambda, A))$ invertierbar und es gilt (Neumannsche Reihe):

$$(\lambda - C)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mathrm{id} - B\,R(\lambda, A))^{-1} = (\lambda - A)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(B\,R(\lambda, A))^n.$$

Damit folgt

$$\|R(\lambda, C)\| \leq \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\|B\,R(\lambda, A)\|^n \leq \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}\|B\|)^n = \lambda^{-1}\frac{1}{1 - \lambda^{-1}\|B\|^n} = \frac{1}{\lambda - \|B\|}.$$

Also ist C nach dem Satz von Hille-Yosida (Satz 2.28) Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$, die der Abschätzung in (5.2) genügt.

2. Fall. $M \geq 1$. Wie in Lemma 2.45 definiere auf X die Norm

$$\|x\|_{\mathcal{T}} = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\|, \quad x \in X.$$

Diese Norm ist zur gegebenen Norm $\|\cdot\|$ auf X äquivalent und $\mathcal{T}$ ist bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$ eine Kontraktionshalbgruppe. Weiter ist bekannt, daß

$$\|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{T}} \leq M\|x\|.$$

Wegen

$$\|Bx\|_{\mathcal{T}} \leq M\|Bx\| \leq M\|B\|\,\|x\| \leq M\|B\|\,\|x\|_{\mathcal{T}}$$

folgt $\|B\|_{\mathcal{T}} \leq M\|B\|$ (dabei bezeichnet $\|B\|_{\mathcal{T}}$ die Norm des Operators B als Abbildung in $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{T}})$). Damit folgt nach dem 1. Fall, daß C in $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{T}})$ eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ erzeugt mit $\|S(t)\|_{\mathcal{T}} \leq \mathrm{e}^{t\|B\|_{\mathcal{T}}}$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\|S(t)x\| \leq \|S(t)x\|_{\mathcal{T}} \leq \mathrm{e}^{t\|B\|_{\mathcal{T}}}\,\|x\|_{\mathcal{T}} \leq M\,\mathrm{e}^{tM\|B\|}\,\|x\|, \qquad x \in X. \qquad \square$$

Wünschenswert ist, eine Formel für $\mathcal{S}$ zu haben.
Man erhält folgende implizite Formeln:

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x\,\mathrm{d}s \tag{5.3}$$

$$= T(t)x + \int_0^t S(s)BT(t-s)x\,\mathrm{d}s. \tag{5.4}$$

Beweis von (5.3). Beachte, daß $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(C)$, da B beschränkt ist. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist die Funktion $\xi_x : [0,t] \to X$, $\xi_x(s) = T(t-s)S(s)x$ stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{ds}\xi_x(s) = T(t-s)CS(s)x - T(t-s)AS(s)x = T(t-s)(C-A)S(s)x = T(t-s)BS(s)x.$$

Es folgt

$$S(t) - T(t) = \xi_x(t) - \xi_x(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}\xi_x(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(t-s)BS(s)x\,\mathrm{d}s.$$

Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in X liegt und S und T auf endlichen Intervallen gleichmäßig beschränkt sind, folgt die Behauptung auch für alle $x \in X$.
Der Beweis von (5.4) verläuft analog mit Hilfe der Funktion $\eta_x : [0,t] \to X$, $\eta_x(s) = S(s)T(t-s)x$. $\square$

Die Idee ist nun, Formel (5.3) als Gleichung der Form

$$T(t) = (\mathrm{id} - V)S(t)$$

mit einem geeigneten V auf einem geeigneten Banachraum zu betrachten.
Wähle dazu $t_0 > 0$ fest und definiere den Funktionenraum

$$\begin{aligned} X_{t_0} := C([0,t_0], L_s(X)) &= \{\, F : [0,t_0] \to L(X) : F(\cdot)x \in C([0,t_0], X),\ x \in X \,\} \\ &= \{\, F : [0,t_0] \to L(X) : F(\cdot)x \text{ ist stetig für jedes } x \in X \,\}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Norm

$$\|F\|_\infty = \sup_{s\in[0,t_0]} \|F(s)\|$$

wird X_{t_0} zu einem Banachraum.
Offensichtlich liegen für jedes $t_0 > 0$ die (auf $[0,t_0]$ eingeschränkten) Halbgruppen T und S in X_{t_0}.

5.2 Definition. Es sei X ein Banachraum, $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X und $B \in L(X)$ eine beschränkte lineare Abbildung auf X. Dann heißt

$$V : X_{t_0} \to X_{t_0}, \qquad VF(t)x = \int_0^t T(t-s)BF(s)x \, \mathrm{d}s, \quad t \in [0, t_0], \; x \in X,$$

der (zu $\mathcal{T}$ und B assoziierte) *Volterra-Operator*.

5.3 Lemma (Eigenschaften von V). *Mit der Notation in Definition 5.2 gilt:*

i) *V ist ein beschränkter linearer Operator auf X_{t_0},*

ii) $\|V^n\| \leq \dfrac{(M\|B\|t_0)^n}{n!}$ *$n \in \mathbb{N}$, mit* $M = \sup\limits_{t\in[0,t_0]} \|T(t)\|$.

iii) $r(V) = 0$, *insbesondere ist* $1 \in \rho(V)$.

Beweis. i) Die Linearität von V und die Stetigkeit von $VF(\cdot)x$ für $x \in X$ ist klar. Für $x \in X$ und $t \in [0, t_0]$ gilt

$$\begin{aligned} \|VF(t)x\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)BF(s)x \, \mathrm{d}s \right\| \leq \int_0^t \|T(t-s)BF(s)x\| \, \mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \, \|B\| \, \|F(s)\| \, \|x\| \, \mathrm{d}s \leq M \, \|B\| \, \|F\|_\infty \, \|x\| \int_0^t \mathrm{d}s \\ &= M \, \|B\| \, t \, \|F\|_\infty \, \|x\| \leq M \, \|B\| \, t_0 \, \|F\|_\infty \, \|x\|. \end{aligned}$$

Also folgt $VF(t) \in L(X)$, $t \in [0, t_0]$, $VF \in X_{t_0}$ und $\|VF\|_\infty \leq M\|B\|t_0\|F\|_\infty$, $F \in X_{t_0}$, also $\|V\|_{L(X_{t_0})} \leq M\|B\|t_0$.

ii) Die Behauptung folgt, wenn gezeigt ist, daß

$$\|V^n F(t)x\| \leq \frac{(M \, \|B\| \, t)^n}{n!} \|F\|_{X_{t_0}} \|x\|, \qquad x \in X, \; t \in [0, t_0]. \tag{5.5}$$

Der Beweis dazu erfolgt induktiv. Für $n = 1$ wurde (5.5) schon im Beweis von i) gezeigt. Ist (5.5) schon für n gezeigt, so folgt

$$\begin{aligned} \|V^{n+1}F(t)x\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)B(V^n F)(s)x \, \mathrm{d}s \right\| \leq M\|B\| \, \|x\| \int_0^t \|(V^n F)(s)\| \, \mathrm{d}s \\ &\leq M\|B\| \, \|x\| \int_0^t \frac{(M\|B\|)^n}{n!} s^n \, \mathrm{d}s = (M\|B\|)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \|x\| \end{aligned}$$

iii) Da $(n!)^{1/n} \to \infty$, $n \to \infty$, folgt aus ii), daß $r(V) = \lim_{n\to\infty} \|V^n\|^{1/n} = 0$. Andererseits gilt für den Spektralradius $0 = r(V) = \sup\{|\lambda| \, : \, \lambda \in \sigma(B)\}$, also $\sigma(V) \subseteq \{0\}$. □

Damit kann man nun eine Reihendarstellung für die von C erzeugte Halbgruppe $\mathcal{S}$ finden.

5.4 Satz. *Es sei X ein Banachraum, A Erzeuger der stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf X, $B \in L(X)$, $C = A + B$ und $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ die von C erzeugte stark stetige Halbgruppe auf X. Dann gilt*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t), \quad t \geq 0, \tag{5.6}$$

mit

$$S_0(t) = T(t), \qquad S_{n+1}(t) = VS_n(t) = \int_0^t T(t-s)BS(s) \, \mathrm{d}s.$$

Beweis. Da nach Definition von V gilt $T(\cdot) = (\mathrm{id} + V)S(\cdot)$, und nach Lemma 5.3 $1 \in \rho(V)$, folgt

$$S(\cdot) = (\mathrm{id} + V)^{-1} T(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n T(\cdot)$$

Bei festem $t \geq 0$ erfolgt die Konvergenz in der Operatornorm, vgl. Abschätzung in ii). Ebenso folgt, daß die Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ gleichmäßig erfolgt, da t beliebig groß gewählt werden kann. □

Bemerkung. Die Reihe in (5.6) heißt *Dyson-Philipps-Reihe*.

5.5 Korollar. *Mit den Bezeichnungen wie vorher folgt: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so daß*

$$\|T(t) - S(t)\| \leq Ct, \qquad t \in [0, 1].$$

Beweis. Mit (5.3) und Lemma 5.3 folgt

$$\|T(t)x - S(t)x\| = \left\| \int_0^t T(t-s)BS(s)x \, \mathrm{d}s \right\| \leq C_{\mathcal{T}} C_{\mathcal{S}} \|B\| \|x\| \int_0^t \mathrm{d}s = C\, t \|x\|,$$

mit $C_{\mathcal{T}} = \sup_{s \in [0,1]} \|T(s)\|$, $C_{\mathcal{S}} = \sup_{s \in [0,1]} \|S(s)\|$ und $C = C_{\mathcal{T}} C_{\mathcal{S}} \|B\|$. □

Literaturverzeichnis

[DS07] Denk, R. und J. Saal: *Skript zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II*, 2007.
http://www.math.uni-konstanz.de/~denk/skripten/rds17.pdf.

[EN00] Engel, K.-J. und R. Nagel: *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Band 194 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[HP57] Hille, E. und R. S. Phillips: *Functional analysis and semi-groups*. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957. rev. ed.; online: http://www.ams.org/online_bks/coll31/.

[Kat80] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, second Auflage, 1980.

[Wer00] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, erweiterte Auflage, 2000.

Übungsaufgaben

Übungen zu Kapitel 1

Aufgabe 1. Es sei $(V, (\cdot\,,\,\cdot))$ ein unitärer oder euklidischer Raum. Zeige, daß dann $(V, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := (x\,,x)^{\frac{1}{2}}$ ein normierter Raum ist und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt:

$$|(x\,,y)| \leq \|x\|\,\|y\|, \qquad x, y \in X.$$

Aufgabe 2. Zeige, daß $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist, falls

(a) $X = \mathbb{R}^n$ und $\|x\| := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in X = \mathbb{R}^n$; skizziere die Einheitskugel.

(b) $X = C([0,1])$ und $\|f\| = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\}$, $f \in X$. Ist auch $X = C((0,1))$ mit $\|f\| = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in (0,1)\}$, $f \in X$, ein normierter Raum?

Aufgabe 3. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A \in L(X)$. Zeige

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \inf\{c \geq 0 \,:\, \|Ax\| \leq c\|x\|,\; x \in X\}.$$

Insbesondere gilt also

$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|, \qquad x \in X.$$

Aufgabe 4. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume. Zeige, daß für $S \in L(Y,Z)$ und $T \in L(X,Y)$ gilt: $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$. Gilt Gleichheit?

Aufgabe 5. Es sei $X = \mathbb{C}^n$ und $A \in L(X)$ symmetrisch. Zeige

$$\|A\| = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \text{ Eigenwert von } A\}.$$

Aufgabe 6. Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Zeige, daß T genau dann abschließbar ist, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ gilt:

$$x_n \to 0,\ \exists\, y \in Y:\ Tx_n \to y,\ n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad y = 0.$$

Übungen zu Kapitel 2

Übungen zu Kapitel 2.1

Aufgabe 1. Es sei $X = \mathscr{L}_p(\mathbb{R})$ oder $X = BUC(\mathbb{R})$ und

$$T(t)f(\xi) := f(\xi + t), \qquad f \in X,\ \xi \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Zeige, daß $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Halbgruppe ist.

Aufgabe 2. (Wachstumsschranke)

i) Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T}$ eine nilpotente C_0-Halbgruppe auf X. Zeige $\omega_0(\mathcal{T}) = -\infty$.

ii) Eine nicht-nilpotente Halbgruppe mit $\omega_0 = -\infty$:
Es sei $X = C_0((-\infty, 0]) := \{f \in C((-\infty, 0]) : \lim_{\xi\to-\infty} f(\xi) = 0\}$ mit der Norm $\|f\| = \sup\{|f(\xi)| : \xi \in (-\infty, 0]\}$ und

$$(T(t)f)(\xi) := \mathrm{e}^{-t^2+2\xi t} f(\xi - t), \quad f \in X,\ \xi \le 0,\ t \ge 0.$$

Zeige, daß $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X ist, die nicht nilpotent ist und Wachstumsschranke $\omega_0(\mathcal{T}) = -\infty$ hat.

iii) Es sei $X = C[0, 1]$. Für $f \in X$, $t > 0$ setze

$$T(0)f = f, \qquad (T(t)f)(\xi) = \begin{cases} \mathrm{e}^{t\log\xi}\,[f(\xi) - f(0)\log\xi], & \xi \in (0, 1], \\ 0, & \xi = 0. \end{cases}$$

Zeige, daß $T(t) \in L(X)$, $t \ge 0$ und daß $(T(t))_{t\ge0}$ eine Halbgruppe auf X ist. Zeige, daß T stark stetig auf $(0, \infty)$ ist, nicht aber in $t = 0$, denn $\lim_{t\searrow0} \|T(t)\| = 0$.

Aufgabe 3. Jede stetige Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$f(s + t) = f(s)f(t), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

ist differenzierbar (vgl. Satz 2.13). Gibt es eine Lösung, die nicht stetig ist?

Übungen zu Kapitel 2.3

Aufgabe 4. Beweise die Bemerkung auf Seite 26: Ist X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\ge0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Eine Abbildung $u : \mathbb{R}_+ \to X$ heißt eine *klassische Lösung*von

$$\frac{d}{dt}x = Ax(t), \quad t \ge 0, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

falls u stetig differenzierbar ist, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t \ge 0$, und u das Anfangswertproblem (1) löst. Ist $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, so ist $T(\cdot)x_0$ die eindeutige klassische Lösung von (1). Für $k \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathcal{D}(A^k)$ ist $T(\cdot)x_0 \in C^k([0, \infty), X) \cap C^{k-1}([0, \infty), \mathcal{D}(A))$.

Aufgabe 5. Es seien X ein Banachraum und $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Gegeben sei eine gleichmäßig konvergente Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^1([a, b], X)$, so daß auch die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert, so ist die Grenzfunktion differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} f_n(t), \qquad t \in (a, b).$$

Aufgabe 6. Erzeugersatz für stark stetige Gruppen Es sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$. Dann sind äquivalent:

i)A erzeugt eine stark stetige Gruppe $\mathcal{G} = (G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf X mit

$$\|G(t)\| \le M\,\mathrm{e}^{|\omega t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ii)A ist dicht definiert und abgeschlossen, $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > \omega\} \subseteq \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)^n\| \le \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ |\lambda| > \omega.$$

iii) A ist dicht definiert und abgeschlossen, $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\lambda| > \omega\} \subseteq \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \ |\operatorname{Re}\lambda| > \omega.$$

Dann ist A Erzeuger einer stark stetigen Gruppe $\mathcal{G} = (G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ in X genau dann, A dicht definiert und abgeschlossen ist und wenn es $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so daß A

Aufgabe 7. Es sei $1 \leq p < \infty$ und $X = \mathscr{L}_p(\mathbb{R})$. Ist $A \in \mathscr{L}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{D}(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}) = \{f \in X \ : \ f \text{ absolut stetig}, \ f' \in X\}, \qquad Af = f'.$$

Dann erzeugt A die Translationshalbgruppe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ mit $(T(t)f)(\xi) = f(t+\xi)$, $t \geq 0$, $f \in X, \xi \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8. Es sei $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ die Diffusionshalbgruppe (definiert wie in (2.29)). Zeige, daß $\mathcal{T}$ eine Halbgruppe ist.

Übungen zu Kapitel 2.4

Aufgabe 9. Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine beschränkte stark stetige Halbgruppe auf X (d. h., es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $\|T(t)\| \leq M, \ t \geq 0$). Zeige, daß

$$\|x\|_{\mathcal{T}} := \sup_{s\geq 0} \|T(s)x\|, \qquad x \in X,$$

eine Norm auf X ist. Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$ sind äquivalent und $\mathcal{T}$ ist eine Kontraktionshalbgruppe auf $(X, \ \|\cdot\|_{\mathcal{T}})$.

Aufgabe 10. Es sei $X = \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$ und $A \in \mathscr{L}(X)$ mit

$$Af = f'', \quad f \in \mathcal{D}(A) := W^{2,2}(\mathbb{R}).$$

Zeige, daß A dissipativ ist.

Übungen zu Kapitel 3

Aufgabe 1. Es sei X ein Banachraum, $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$. Gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0,$$

so ist A sektoriell.

Aufgabe 2. Es sei X ein Banachraum, $A \in \mathscr{L}(X)$ sektoriell und $\mathcal{T} = (T(z))_{z\in\Sigma_\delta}$ die von A erzeugte analytische Halbgruppe. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ folgt

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3. Folgere aus Aufgabe 3.2: Für jedes $t \geq 0$ ist $T(t)$ injektiv. Insbesondere gibt es keine nilpotente analytische Halbgruppe.

Bezeichnungen

$BUC(\Omega)$	Raum der stetigen, gleichmäßig beschränkten Funktionen auf Ω
$C(\Omega)$	Raum der stetigen Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$C_0(\Omega)$	$= \{f \in C(\Omega) : \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K_\varepsilon \subseteq \Omega$ kompakt, so daß $\lvert f(\xi)\rvert < \varepsilon,\ \xi \in \Omega \setminus K_\varepsilon\}$
H	bezeichnet meist einen Hilbertraum
$\mathscr{L}_p(\Omega)$	Raum der p-integrablen Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathscr{L}_\infty(\Omega)$	Raum der wesentlich beschränkten Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathscr{L}(X, Y)$	Raum der linearen Abbildungen mit Definitionsbereich in X und Wertebereich in Y
$\mathscr{L}(X)$	Raum der linearen Abbildungen mit Definitions- und Wertebereich in X
$L(X, Y)$	Raum der linearen beschränkten Abbildungen mit Definitionsbereich X und Wertebereich in Y
$L(X)$	Raum der linearen beschränkten Abbildungen mit Definitionsbereich X und Wertebereich in X
R_+	$= [0, \infty)$
$R(\lambda, T)$	$= (\lambda - T)^{-1}$, falls $T \in \mathscr{L}(X)$ und $\lambda \in \rho(T)$
Σ_φ	$= \{z \in \mathbb{C} : \lvert\arg z\rvert < \varphi\} \setminus \{0\}$ für $\varphi \in (0, \pi]$.
$X,\ Y$	bezeichnen meist einen Banachraum

Index