Universidad de los Andes, MATE-4201

Análisis para postgrado

Taller 12

Operadores lineales.

Fecha de entrega: 21 de noviembre de 2013

---

1. Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión acotada, y,
$$T : \ell^1 \to \ell^1, \qquad T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Encuentre $\sigma(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$. Muestre además que, para todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto no vacío, existe un operador $T \in L(\ell^1)$ cuyo espectro es K.

2. (a) Sea $X = C([0,1])$ y $a \in C([0,1])$. Muestre que
$$A : X \to X, \qquad (Ax)(t) = a(t)x(t)$$
es un operador lineal acotado. Encuentre $\|A\|$, $\sigma(A)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(A)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(A)$.

   (b) Sea $X = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ y
$$S : X \to X, \qquad (Sf)(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s.$$
Encuentre $\sigma(S)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(S)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(S)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(S)$.

3. Sea $X = C[0,1]$ y $k \in C[0,1]^2$ y defina
$$T : X \to X, \qquad (Tx)(t) = \int_0^t k(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s$$

   (a) Muestre que T es compacto.

   (b) Muestre que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$.

   (c) Muestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para todo $y \in X$ existe exactamente un $x \in X$ tal que $(T - \lambda)x = y$.

4. Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y $T \in L(X)$ un operador compacto. Muestre que $0 \in \sigma(T)$.