Análisis para postgrado

Taller 12

Operadores lineales.

Fecha de entrega: 8 de noviembre de 2013

---

1. [1] Sean X, Y, Z espacios de Banach, $R \in L(X, Y)$, $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to Y$, $S : Y \supseteq \mathcal{D}(S) \to Z$ operadores lineales cerrados. Muestre que:

   (a) $R + T$ es un operador lineal cerrado.

   (b) SR es cerrado.

   (c) Si S es contínuamente invertible (i. e., $S^{-1} : \mathrm{rg}(S) \to Y$ existe y es contínuo), entonces ST es cerrado.

   Muestre además que estas afirmaciones siguen siendo válidas cambiando "cerrado" por "clausurable"

2. Sea $X = \ell_2(\mathbb{N})$ y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to X$, $Tx = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diga si T es cerrado con:

   (a) $\mathcal{D}(T) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})\}$,

   (b) $\mathcal{D}(T) = d = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : x_n \neq 0 \text{ para solo finitos } n\}$.

3. Sean H_1, H_2 y H_3 espacios de Hilbert y $S(H_1 \to H_2)$ y $T(H_2 \to H_3)$ operadores lineales densamente definidos.

   (a) Si $T \in L(H_2, H_3)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.

   (b) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.

   (c) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces S^* es inyectivo y $(R^*)^{-1} = (R^{-1})^*$

4. Para los sigientes operadores encuentre los operadores adjuntos, el espectro puntual, el espectro continuo y el espectro residual:

$$\begin{aligned} &R : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \\ &L : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots), \\ &T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots). \end{aligned}$$

---

[1] Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal.

(a) Sea $S : X \supseteq \mathcal{D}(S) \to Y$ un operador lineal. Entonces la *suma de operadores* $S + T$ se define por $\mathcal{D}(S + T) := \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$, $(S + T)x := Sx + Tx$.

(b) Sea $R : Y \supseteq \mathcal{D}(R) \to Z$ un operador lineal. Entonces el *producto de operadores* or *composición* RT se define por $\mathcal{D}(RT) := \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(R)\}$, $(RT)x := R(Tx)$.