Universidad de los Andes, MATE-4201

Análisis para postgrado

Taller 11

Espacios de Hilbert; proyecciones ortogonales;
Teorema de Riesz-Fréchet.

Fecha de entrega: 25 de octubre de 2013

---

1. Sea X un espacio normado, $f : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo y $U = \ker f$
   (a) Muestre que $\dim(X/U) = 1$.
   (b) Muestre que f es continuo si y solo si $\ker f$ es cerrado.

2. Sea $w \in C([0,1], \mathbb{R})$. Para $x, y \in C([0,1])$ se define
$$\langle x\,, y\rangle_w := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Halle una condición necesaria y suficiente sobre w para que $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_w$ sea un producto interno.Bajo qué condición la norma inducida por $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_w$ es equivalente a la norma usual de L_2?

3. Sea X un espacio pre-Hilbert y $U \subseteq X$ un subespacio.
   (a) Muestre que $\overline{U} \neq U^{\perp\perp}$ es posible. ¿Se tiene alguna contenencia?
   (b) Muestre que $\overline{U} \oplus U^{\perp} \neq X$ es posible.

4. Ejemplo de una proyección no acotada. Sea $\mathcal{H} = l_2$ y e_i el vector usual $e_i^j = \delta_i^j$. Defina
$$L_1 := \overline{\operatorname{span}\{e_{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}}, \qquad L_2 := \overline{\operatorname{span}\left\{e_1 + \frac{1}{2}e_2, e_3 + \frac{1}{2^2}e_4, e_5 + \frac{1}{2^3}e_6, \dots\right\}}.$$
   (a) Muestre que $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.
   (b) Muestre que $\overline{L_1 \oplus L_2} = \mathcal{H}$.
   (c) Muestre que $L_1 \oplus L_2 \neq \mathcal{H}$.
   (d) Defina el operador $P_0 : L_1 \oplus L_2 \to L_1 \oplus L_2$, $P_0(x + y) = x$. Muestre que P_0 es una proyección no acotada.