Análisis para postgrado

Taller 10

Fecha de entrega: 18 de octubre de 2013

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región acotada con clausura $\overline{U}$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\overline{U} \to \mathbb{C}$ tal que cada f_n es holomorfa en U y continua en $\overline{U}$. Suponga que las f_n convergen uniformemente en ∂U. Muestre que las f_n convergen uniformemente en $\overline{U}$ a una función f que es holomorfa en U y continua en $\overline{U}$.

2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas que convergen a una función f uniformemente en cada compacto $K \subset U$. Sea $w \in U$. Si f no es constante, entonces existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ y un $N_w \in \mathbb{N}$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} z_n = w \qquad \text{y} \qquad f_n(z_n) = f(w) \quad \text{para} \quad n \geq N_w.$$

3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente acotada de funciones holomorfas $U \to \mathbb{C}$. Suponga que existe un $w \in U$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $(f_n^{(k)}(w))_{n\in\mathbb{N}}$ de las derivadas en w converge. Muestre que las f_n convergen uniformemente en cada subconjunto compacto $K \subset U$.

4. Sea $U \subset C$ abierto y $w \in U$. Sea $A := \{f : U \to \mathbb{C} : f \text{ holomorfa}, \|f\|_\infty \leq 1 \text{ y } f(w) = 0\}$. Muestre que existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a una función holomorfa f, uniformemente en conjuntos compactos $K \subset U$, tal que $|g'(w)| \leq |f'(w)|$ para todo $g \in A$ y $|f(z)| < 1$ para todo $z \in U$.