Universidad de los Andes, MATE-4201

Análisis para postgrado

Taller 9

La derivada logarítmica; cálculo con residuos; continuación analítica.

Fecha de entrega: 11 de octubre de 2013

---

1. Sea $a > 0$. Calcule las sigientes integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Sean P, Q polinonmios con $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geq 0$ y $\deg Q \geq 2 + \deg P$ y sea $R = \frac{P}{Q}$. Exprese $\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x$ en términos de los residuos de $\ln(z)R(z)$ donde ln es un logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$.

3. Sean $b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $k, n \in \mathbb{N}$ con $0 < k < n$. Defina $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ P(z) = z^n + bz^k + c$.
   (a) Suponga que $|z^n| > |bz^k + c|$ para todo z con $|z| = R$ y $|c| > |z^n + bz^k|$ para todo z con $|z| = r$. Muestre que todos los ceros de P pertenecen a $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.
   (b) Determine el número de los ceros (contado con multiplicidad) de:
      (i) $P_1(z) := z^8 - 3z^2 + 1$ en $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,
      (ii) $P_2(z) := z^7 - 5z^3 + 7$ en $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$,
      (iii) $P_3(z) := 3z^4 - 7z + 2$ en $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3/2\}$.

4. Sean $U_0, U_1, \ldots, U_n$ bolas abiertas en $\mathbb{C}$ con centros z_j tal que $\{z_{j-1},\, z_j\} \in U_{j-1} \cap U_j$ $(j = 1, \ldots n)$. Sea $f_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que f_0' tiene continuación analítica a U_n. Muestre que también f_0 tiene continuación analítica a U_n.