Universidad de los Andes, MATE-4201

Análisis para postgrado

Taller 8

Teorema de Cauchy; cálculo con residuos.

Fecha de entrega: 4 de octubre de 2013

---

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo con $\mathbb{R} \subseteq U$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(x+n) = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se puede concluir que $f(z+n) = f(z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in U$?

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa con $|f(z)| \geq 3$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Muestre que f es constante.

3. Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2} \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-a^2/2}$ para $a \in \mathbb{R}$.

   Ayuda. Para $R > 0$ considere el camino γ que es la frontera del rectángulo con esquinas $-R$, R, $R + \mathrm{i}a$ y $R - \mathrm{i}a$.

4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Suponga que para $a \in \mathbb{C}$, por lo menos un coeficiente en la serie de Taylor de f en a se anula. Muestre que f es un polinomio.

   Ayuda. Muestre que cada subconjunto más que contable de $\mathbb{C}$ tiene un punto de acumulación.