# Análisis para postgrado

Taller 7

Teorema de Cauchy; cálculo con residuos. Fecha de entrega: 20 de septiembre de 2013

---

1. Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto finito y sea $f : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C}$ holomorfa.
   (a) Muestre que $g(z) := z^{-2} f(z^{-1})$ es holomorfa en $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.
   (b) Muestre que $\operatorname{Res}_0 g = \sum_{c \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_c f$.
   (c) Calcule $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1}\, \mathrm{d}z$.

2. Sea $R = \frac{P}{Q}$ con polinomios $P$ y $Q$ tal que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$. Muestre que $\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} R(x)\, \mathrm{d}x$ existe y exprese este límite en términos de los residuos de $R$.

3. Sea $\gamma = \partial(B_2(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\})$. Calcule las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(\sin z)^2 \cos z}\, \mathrm{d}z, \qquad (b) \quad \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2 + 1}\, \mathrm{d}z.$$

4. Calcule las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13}\, \mathrm{d}x, \qquad (b) \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x,$$

$$(c) \quad \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, \mathrm{d}x \quad (a > 0), \qquad (d) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x.$$