Universidad de los Andes, MATE-4201

Análisis para postgrado

Taller 5

Principio de la identidad, principio del máximo. Fecha de entrega: 6 de septiembre de 2013

---

1. Calcule $\oint_{|z-1|=2} z^n \sin(z)\, \mathrm{d}z$ para $n \in \mathbb{Z}$.

2. (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región (es decir, un subconjunto abierto y conexo) y $K \subset U$ un subconjunto compacto con interior K° no vacío. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa con $|f|$ constante en la frontera de K. Muestre que f es constante o tiene un cero en K°.

   (b) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$, $\varepsilon > 0$ tal que la bola cerrada $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$ es subconjunto de U. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa con $|f(z_0)| < \min\{|f(z)| : |z - z_0| = \varepsilon\}$. Muestre que f tiene un cero en $B_\varepsilon(z_0)$.

3. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergenc $R \in (0, \infty)$. Muestre que f tiene por lo menos un punto singular en la frontera del disco de convergencia.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado, y sea $M \subset U$ un conjunto discreto sin puntos de acumulación en U. Muestra que cada función biholomorfa $f : U \setminus M \to U \setminus M$ tiene una extensión biholomorfa $g : U \to U$.