Universidad de los Andes, MATE-4201

Análisis para postgrado

Taller 4

Integración en el plano complejo;
el teorema de Cauchy y sus corolarios.

Fecha de entrega: 30 de agosto de 2013

---

1. Determine una curva cerrada γ que recorre las siguientes segmentos de líneas

$$[-1, \mathrm{i}], [-1, 1], [-1, 1-\mathrm{i}], [-1, -1-\mathrm{i}], [1, \mathrm{i}], [1, -1-\mathrm{i}], [1, 1-\mathrm{i}], [-1-\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}]$$

   y el arco

$$\Big\{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : \varphi \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\Big]\Big\}$$

   exactamente una vez y calcule

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \int_\gamma z \,\mathrm{d}z.$$

2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f : U \to X$ una función holomorfa no constante y $N := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$. Muestre que N es cerrado y discreto en U.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Muestre que el rango de f es denso en $\mathbb{C}$ o f es constante.

4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existen $M, r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| < M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq r$. Muestre que f es un polinomio de grado a lo más n.

   Observe que el caso $n = 0$ es el teorema de Liouville.