Análisis para postgrado

Taller 3

Corolarios al teorema de Hahn-Banach;
funciones holomorfas; exp, sin, cos.

Fecha de entrega: 23 de agosto de 2013

---

1. Sea X un espacio normado. Muestre:
   (a) Para todo $x \in X \setminus \{0\}$ existe $\varphi \in X'$ tal que $\varphi(x) = \|x\|$.
   (b) $x = 0 \iff \forall \varphi \in X'\ \varphi(x) = 0$.
   (c) $x \neq y \implies \exists \varphi \in X'\ \varphi(x) \neq \varphi(y)$.
   (d) Sea X un espacio normado, $Y \subset X$ un subespacio. Si $z \in X \setminus \overline{Y}$, entonces existe $\varphi \in X'$ tal que $\varphi|_Y = 0$ y $\varphi(z) = 1$.

2. Claramente se tiene que $\exp(z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Muestre las siguientes propiedades de las funciones exp, sin, cos.
   (a) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.
   (b) $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (c) $|\exp(z)| = 1$ si y solo si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
   (d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (e) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ y $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (f) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\pm\infty} |\cos(x + \mathrm{i}t)| = \infty$ y $\lim_{t\to\pm\infty} |\sin(x + \mathrm{i}t)| = \infty$. El límite es uniforme en x.

3. Determine todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde las siguientes funciones son *complex differentiable*:
   (a) $f(z) = \overline{z}$,
   (b) $f(z) = |z|$,
   (c) $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}(x^2 - y^2)$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{C}$ tal que, vista como función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, es diferenciable. Define
$$\partial f,\ \bar\partial f : U \to \mathbb{C}, \quad \partial f := \frac{1}{2}\Big(\partial_x f - \mathrm{i}\,\partial_y f\Big) \quad \text{y} \quad \bar\partial f := \frac{1}{2}\Big(\partial_x f + \mathrm{i}\,\partial_y f\Big).$$
   Muestre:
   (a) $\overline{\partial f} = \bar\partial \bar f$ y $\partial \bar f = \overline{\bar\partial f}$.
   (b) f es holomorfo si y solo si $\bar\partial f = 0$. En este caso se tiene que $f' = \partial f$.