Universidad de los Andes, MATE-4201

Análisis funcional

Taller 2

Espacios normados

Fecha de entrega: 16 de agosto de 2013

---

1. Sea X un espacio normado. Muestre que:
   (a) Todo subespacio finito-dimensional de X es cerrado.
   (b) Si V es un subespacio finito-dimensional de X y W es un subespacio cerrado de X, entonces
   $$V + W := \{v + w : v \in V,\ w \in W\}$$
   es un subespacio cerrado de X.

2. Sea X un espacio compacto, $C_{\mathbb{R}}(X)$ el conjunto de funciones continuas real-evaluadas sobre X y $Y \subset X$ un subconjunto cerrado.
   (a) Considere el mapa $\varrho : C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ definido por $\varrho(f) = f|_Y$. Muestre que $I := \ker(\varrho)$ es un subespacio cerrado de $C_{\mathbb{R}}(X)$.
   (b) Sea $\widetilde{\varrho} : C_{\mathbb{R}}(X)/I \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ el mapa inducido en el espacio cociente. Pruebe que $\widetilde{\varrho}$ es una isometría.
   (c) Demuestre que $\operatorname{rg}(\varrho)$ es completo.
   (d) Muestre el teorema de extensión de Tietze: Sea X un espacio topológico, $Y \subset Y$ un subespacio cerrado y $f : Y \to \mathbb{R}$ continua. Muestre que existe una función continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}|_Y = f$ y $\|\widetilde{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$.

   Hint. Use el teorema de Stone-Weierstraß.

3. Reccuerde que
   $$\begin{aligned} d &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \neq 0 \text{ para solo finitos } n\},\\ c_0 &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},\\ c &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ exists}\}. \end{aligned}$$
   Claramente son espacios normados con la norma $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Muestre que c_0 y c con espacios de Banach y que d no es completo.

4. Sea $1 \le p \le q \le \infty$. ¿Se tiene alguna de las inclusiones $\ell_p(\mathbb{N}) \subset \ell_q(\mathbb{N})$ ó $\ell_q(\mathbb{N}) \subset \ell_p(\mathbb{N})$?