Análisis para postgrado

Taller 1

Espacios topológicos, métricos y normados. Fecha de entrega: 9 de agosto de 2013

---

1. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Y un espacio normado. Recuerde que $C_c(X,Y)$ es el conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to Y$ con soporte compacto, y que $C_0(X,Y)$ es el conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{C}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe und compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X \setminus K$. Muestre que $\overline{C_c(X,Y)} = C_0(X,Y)$ (donde la clausura es con respecta a la norma $\|\cdot\|_\infty$).

2. (a) Sea Z un espacio topológico, $X, Y \subset Z$ closed tal que $X \cup Y$ y $X \cap Y$ son conexos. ¿Se puede concluir que X y Y son conexos?
   (b) ¿Existen espacios conexos pero no conexos por caminos?
   (c) ¿Existen espacios conexos por caminos pero no conexos?

3. Determine si las siguientes sucesiones convergen puntualmente y si convergen uniformemente. En caso de convergencia, determine la función límite.
   (a) $f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} |x-n| - 1, & n-1 \leq x \leq n+1, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$
   (b) $g_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_n(x) := \frac{1}{1+(x/n)^2}$.
   (c) $h_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) := \sin(x/n)$.
   (d) $k_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} \sin x, & 2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1), \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$

4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Muestre que X es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente convergente es convergente.