

Teoría de Operadores III

Taller 9

Teorema del Kernel

Fecha de entrega: Mañana
Juan Pablo Mendoza Arias

Ejercicio 1. Sean

$$H_{+,k} \subseteq H_{0,k} \subseteq H_{-,k}, \quad k = 1, \dots, n$$

cadenas de Hilbert. Suponemos que cada embebimiento $O_k : H_{+,k} \rightarrow H_{0,k}$ es Hilbert-Schmidt, $k = 1, \dots, n$. Demuestre que toda forma multilineal continua a en $\times_{k=1}^n H_{0,k}$ admite una representación de la forma

$$a(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = \langle u^{(1)} \otimes \dots \otimes u^{(n)}, A \rangle_{\otimes_{k=1}^n H_{0,k}}, \quad u^{(k)} \in H_{+,k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

con $A \in \otimes_{k=1}^n H_{-,k}$ único.

Ejercicio 2. Sea $H = L^2(0, 1)$. Considere el operador favorito de Alejandro

$$Af = -f'', \quad \mathcal{D}(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1).$$

Encuentre una función $G \in L^2((0, 1)^2)$ tal que para toda $h \in L^2(0, 1)$, la ecuación $Af = h$ tiene solución $f \in \mathcal{D}(A)$ dada por

$$f(x) = \int_0^1 G(x, y)h(y) dy, \quad \text{para casi todo } x \in (0, 1).$$