

Teoría de Operadores III

Taller 6

Límite proyectivo de espacios vectoriales topológicos

Fecha de entrega: Cuando la termine :)
Juan Pablo Mendoza Arias

Ejercicio 1. Sean $(B_n)_n$ espacios de Banach, cuyas normas denotamos por $\|\cdot\|_n$, tales que el límite proyectivo $\Phi = \text{pr} \lim_{n \in \mathbb{N}} B_n$ está bien definido (los espacios B_n satisfacen las hipótesis de la definición de límite proyectivo). Muestre que existen índices $\sigma_n \in \mathbb{N}$ y constantes $a_n > 0$ tales que los espacios

$$E_n := B_{\sigma_n}, \quad \|x\|_{E_n} := a_n \|x\|_{\sigma_n}, \quad x \in E_n,$$

satisfacen

a) Cada $(E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ es Banach, y las inclusiones $E_{n+1} \hookrightarrow E_n$ son densas y continuas, con

$$\|x\|_{E_n} \leq \|x\|_{E_{n+1}}, \quad x \in E_{n+1}.$$

Hint: Tome $\sigma_1 = 1$. De manera inductiva, por definición de límite proyectivo sabemos que existe $\sigma_n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\sigma_n} \subseteq B_{\sigma_{n-1}} \cap B_n$ para $n \geq 2$.

b) $\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

c) Las topologías proyectivas inducidas sobre Φ por las familias $(B_n)_n$ y $(E_n)_n$ coinciden.

Ejercicio 2. Sea Φ un espacio vectorial topológico y Φ' su dual (antilineal y continuo). Definamos

$$U(\varphi; u_1, \dots, u_n) = \{\eta \in \Phi' : |\varphi(u_k) - \eta(u_k)| < 1, k = 1, \dots, n\}, \quad \varphi \in \Phi', u_j \in \Phi, n \in \mathbb{N}.$$

Muestre que la familia de conjuntos $\{U(\varphi; u_1, \dots, u_n) : \varphi \in \Phi', u_1, \dots, u_n \in \Phi, n \in \mathbb{N}\}$ es una base para una topología de Φ' .