

Teoría de Operadores III

Taller 4

Principio min-max y otra cosa

Fecha de entrega: Preferiblemente antes de la semana de receso
Douglas Velásquez

(Principio mín-máx): Sea H un operador autoadjunto acotado inferiormente en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $\mathfrak{h}[u]$ la forma sesquilineal cerrada y semiacotada asociada, con dominio $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$. El n -ésimo autovalor λ_n de H (contando desde el fondo del espectro, incluyendo multiplicidad) se caracteriza por el principio variacional de Rayleigh-Ritz:

$$\lambda_n = \min_{\substack{L \subset \mathcal{D}(\mathfrak{h}) \\ \dim(L)=n}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{\mathfrak{h}[u]}{\|u\|^2}$$

donde el mínimo se toma sobre todos los subconjuntos lineales n -dimensionales L del dominio de la forma $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$. Esta formulación permite estimar los autovalores utilizando funciones de prueba que no pertenecen necesariamente al dominio del operador H .

Ejercicio 1. Considere el Hamiltoniano del hidrógeno en $\mathbb{R}^3$, dado por $H = -\Delta - \frac{1}{|x|}$. Muestre a mano (sin Kato-Rellich ni KLMN) que el operador es semiacotado por abajo con cota ≥ -1 .

Hint: Estudie el cociente de Rayleigh de la forma asociada y use la desigualdad de Hardy.

Ejercicio 2. Considere el operador $A = \frac{-d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x)$. Muestre usando el cociente de Rayleigh que existen estados ligados para todo $\alpha > 0$.

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave. Considere los Laplacianos $-\Delta_N$ con condiciones de Neumann y $-\Delta_D$ con condiciones de Dirichlet. Sean $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\lambda_n\}$ los valores propios respectivamente, ordenados de manera no decreciente y contando multiplicidades.

Muestre que se satisface que

$$\mu_n < \lambda_n, \quad \mu_{n+1} \leq \lambda_n \text{ (Voluntario),}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hint: Si $u \in H^2(\Omega)$ satisface $Lu = 0$ para un operador elíptico de segundo orden L y además $u|_{\partial\Omega} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, entonces $u = 0$.

Ejercicio 4. (Voluntario) Considere el Hamiltoniano relativista de Dirac-Coulomb para el átomo de hidrógeno en $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$, dado por:

$$H = D_0 - \frac{\nu}{r}$$

donde $D_0 = -ic\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2$ es el operador de Dirac libre y $\nu = Z\alpha_{\text{fina}} > 0$. Dado que el espectro de D_0 no está acotado inferiormente ($\sigma(D_0) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty)$), la extensión de Friedrichs estándar no puede aplicarse directamente.

Para formalizar este operador, invocamos el **Teorema de la Extensión de Pseudo-Friedrichs (Kato, 1966)**: Si existe una constante $a \in (0, 1)$ tal que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(D_0)$ se cumple la cota relativa de formas:

$$\left| \left\langle \varphi, \frac{1}{r} \varphi \right\rangle \right| \leq a \langle \varphi, |D_0| \varphi \rangle + b \|\varphi\|^2$$

entonces existe una única extensión autoadjunta H_{PF} de H cuyo dominio está contenido en $\mathcal{D}(|D_0|^{1/2})$.

Muestre utilizando la desigualdad de Kato para el momento cuántico en $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(x)|^2}{r} d^3x \leq \frac{\pi}{2} \langle \varphi, |p| \varphi \rangle,$$

y que en el régimen relativista se cumple $|p| \leq \frac{1}{c}|D_0|$, que el criterio de pseudo-Friedrichs se satisface si la constante de acoplamiento cumple el límite crítico:

$$\nu < \frac{2c}{\pi}.$$