Universidad de los Andes, MATE-4247

Teoría de Operadores III

Taller 3

Perturbaciones de formas y suma formas

Fecha de entrega: 11 de septiembre de 2026

Mateo Bahos

Ejercicio 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere t la forma con dominio $\mathcal{D}(t) = H^1(\mathbb{R})$ dada por:

$$t[f,g] = \langle if', ig' \rangle + \alpha f(0)\overline{g(0)}.$$

Muestre que existe $A = A_t$ y que A actua como $-\frac{d^2}{dx^2}$ con dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in H^2(-\infty,0) \oplus H^2(0,\infty) : f(0+) = f(0-),\ \ f'(0+) - f'(0-) = \alpha f(0)\}$$

Ejercicio 2. Sea $w(x) \in C_0^\infty$ tal que:

a) $\operatorname{supp} w \subseteq [-2,2]$,

b) $w(x) = 1$ en $[-1,1]$

y sean $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de $\mathbb{Q}$ y $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$. Considere

$$V(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{w(x-r_n)}{|x-r_n|^\alpha} & \text{si } \ x \in \mathbb{I} \\ \\ 0 \ \text{ si } \ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Muestre que existe el operador autoadjunto $-\frac{d^2x}{dx^2} \dot{+} V$ pero que $D(V) \cap D\left(-\frac{d^2x}{dx^2}\right) = 0$.