

Teoría de Operadores III

Taller 2

Extensiones de Friedrichs y de Krein-von Neumann

Fecha de entrega: 4 de septiembre de 2026
Nicolás Meléndez

Ejercicio 1. (a) Sea H un espacio de Hilbert y sea $T(H \rightarrow H)$ un operador simétrico y semiacotado por abajo. Muestre que la extensión de Friedrichs T_F es la mayor extensión autoadjunta y semiacotada por abajo de T .

(b) Demuestre la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(a, b)$. Es decir, muestre que para toda función $f \in H_0^1(a, b)$ se tiene que $\|f'\|_{L^2(a, b)} \geq \frac{\pi}{b-a} \|f\|_{L^2(a, b)}$.

Hint: Considere la extensión de Friedrichs del operador $A = -d^2/dx^2$ con dominio $D(A) = H_0^2(a, b)$.

Ejercicio 2. Sea $T(H \rightarrow H)$ un operador cuya extensión de Krein-von Neumann T_N existe. Demuestre que son equivalentes:

- (a) T_N es invertible
- (b) $\text{Rg } T$ es denso en H .

Además, muestre que si alguno de los dos literales es el caso, entonces $T_N^{-1} = (T^{-1})_F$.

Ejercicio 3. (Voluntario) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado. Considere los laplacianos de Dirichlet y Neumann $S_D = -\Delta$ y $S_N = -\Delta$, con dominios

$$D(S_D) = \{f \in H^2(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad D(S_N) = \{f \in H^2(\Omega) : \partial_\nu f|_{\partial\Omega} = 0\},$$

y suponga en el caso de Neumann que $\partial\Omega$ es Lipschitz.

Sean $0 < \lambda_1^D \leq \lambda_2^D \leq \dots$ y $0 = \lambda_1^N \leq \lambda_2^N \leq \dots$ sus valores propios, contados con multiplicidad. Para $\lambda \geq 0$, definimos

$$N_\Omega^D(\lambda) := \#\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n^D \leq \lambda^2\}, \quad N_\Omega^N(\lambda) := \#\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n^N \leq \lambda^2\}.$$

Demuestre que, para todo $\lambda \geq 0$, se tiene que $N_\Omega^D(\lambda) \leq C_d |\Omega|_d \lambda^d \leq N_\Omega^N(\lambda)$, donde C_d es una constante que depende de d .