

Teoría de Operadores III

Taller 1

Formas sesquilineales

Fecha de entrega: 21 de agosto de 2026
Monika Winklmeier

Ejercicio 1. Sea H un espacio de Hilbert, $\mathcal{D} \subseteq H$ un subespacio y $S : \mathcal{D} \rightarrow H$ un operador lineal y defina

$$\mathfrak{s} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathfrak{s}[x, y] = \langle Sx, Sy \rangle.$$

- (a) S es cerrado si y solo si $\mathfrak{s}$ es cerrado.
- (b) S es clausurable si y solo si $\mathfrak{s}$ es clausurable.

Ejercicio 2. Sea $H = \ell_2(\mathbb{N})$ y sea $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$. Defina

$$\mathfrak{t}[x, y] = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in \mathcal{D}(\mathfrak{t}) = \{v \in H : \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| |v_j|^2 < \infty\}.$$

Sean $\gamma \in \mathbb{R}$, $\vartheta \in [0, \pi/2)$ y $\Sigma := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - \gamma)| \leq \vartheta\}$.

- (a) $\mathfrak{t}$ es sectorial con $W(\mathfrak{t}) \subseteq \Sigma$ si y solo si $\{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$.
- (b) Si $\mathfrak{t}$ es sectorial, entonces es cerrado.

Ejercicio 3. Sea H un espacio de Hilbert y $S(H \rightarrow H)$ un operador cerrado densamente definido. Demuestre que S^*S es autoadjunto y que $\mathcal{D}(S^*S)$ es un *core* de S .

Hint. Considere el operador asociado a la forma $\mathfrak{s}[x, y] = \langle Sx, Sy \rangle$.

Ejercicio 4.