

Teoría de Operadores II

Taller 4

C^* -álgebras conmutativas con identidad y polinomios ortogonales

Fecha de entrega: 13 de febrero de 2026
Esteban Quintero Guzmán

Ejercicio 1. Sea A una álgebra de Banach conmutativa con identidad. Muestre que la transformada de Gelfand es una isometría si y solo si $\|x^2\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{T}$ el círculo unitario y Δ el disco unitario cerrado. Sea $A = C(\mathbb{T})$ y $\zeta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\zeta(z) = z$. Sea B la subálgebra cerrada generada por ζ . Muestre que $\sigma_A(\zeta) = \mathbb{T}$ y que $\sigma_B(\zeta) = \Delta$.

Hint: Identifique $\hat{B}$ con Δ . Use el principio del módulo máximo.

Ejercicio 3. Sea

$$d\mu = e^{-x} dx$$

Calcule los primeros 4 polinomios **mónicos** ortogonales asociados a μ .

Ejercicio 4. (Voluntario) Sea X un espacio de Tychonoff (es decir, un espacio completamente regular y T_1). Sea $A = C_b(X)$, el álgebra de funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{C}$. Sabemos ya, por la dualidad de Gelfand, que $A \cong C(\hat{A})$ por medio de la transformada de Gelfand.

- (a) Muestre que el mapa $\beta : X \rightarrow \hat{A}$ dado por

$$\beta(x) = \{f \in A \mapsto f(x)\}$$

esta bien definido y es un embebimiento topológico. Muestre que la imagen de β es densa en $\hat{A}$.

- (b) Muestre que si $f : X \rightarrow [0, 1]$ es continua, entonces existe un mapa continuo $\beta f : \hat{A} \rightarrow [0, 1]$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \hat{A} & \\ \beta \nearrow & & \searrow \beta f \\ X & \xrightarrow{f} & [0, 1] \end{array}$$

conmuta.

- (c) Concluya que $\hat{A}$ es homeomorfo a βX , la compactificación de Stone-Čech de X .