

Teoría de Operadores II

Taller 3

Representaciones de C^* -álgebras

Fecha de entrega: 13 de febrero de 2026
Camilo Moreno Alfaro

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* -álgebra de Banach con identidad y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ un subespacio vectorial tal que $1 \in \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{R}(\mathcal{A})$ ¹. Dado un funcional lineal positivo $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$, defina para cada $x \in \mathfrak{R}(\mathcal{A})$

$$q(x) := \inf\{f(y) : y \in \mathcal{B}, x \leq y\}.$$

- (a) Muestre que $q : \mathfrak{R}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional sublineal.
- (b) Muestre que si $\mathcal{B}$ es una C^* -álgebra y f es un estado en $\mathcal{B}$, entonces existe un estado $\tilde{f}$ en $\mathcal{A}$ que extiende a f .

Ejercicio 2. Sean LIM un límite de Banach en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y H un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Defina el siguiente funcional:

$$f : L(H) \rightarrow \mathbb{C}, \quad T \mapsto \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} \langle T e_n, e_n \rangle.$$

- (a) Muestre que f es un estado en $L(H)$.
- (b) Sea (π_f, H_f) es la representación cíclica asociada a f por el proceso de Gelfand-Naimark-Segal. Muestre que π_f induce una representación isométrica de $L(H)/K(H)$ (puede asumir sin demostración que todo homomorfismo inyectivo de C^* -álgebras es isométrico).

Ejercicio 3. (Voluntario) Sean $\mathcal{A}$ una C^* -álgebra con identidad y $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo. Defina el siguiente conjunto:

$$\mathcal{L} := \{x \in \mathcal{A} : f(x^*x) = 0\}.$$

¿Es $\mathcal{L}$ un ideal bilateral de $\mathcal{A}$?

¹Para una C^* -álgebra $\mathcal{A}$, $\mathfrak{R}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : x^* = x\}$.