Universidad de los Andes, MATE-4246

Teoría de Operadores II

Taller 2

Álgebras de Banach abelianas - C*-álgebras

Fecha de entrega: 6 de febrero de 2026

Juan Pablo Mendoza Arias

Ejercicio 1. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach abeliana con identidad y norma $\|\cdot\|$. Suponga que $\mathscr{A}$ es semisimple, es decir, la intersección de todos sus ideales maximales es trivial. Si $\|\cdot\|_1$ es otra norma en $\mathscr{A}$ tal que $(\mathscr{A}, \|\cdot\|_1)$ es un álgebra de Banach, muestre que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.

Hint: Use el teorema del grafo cerrado para mostrar que el mapa identidad $\mathrm{id} : (\mathscr{A}, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathscr{A}, \|\cdot\|_1)$ es continuo.

Ejercicio 2. Sea $\{\mathscr{A}_i\}_{i\in I}$ una colección de C*-álgebras. En las álgebras $\oplus_\infty \mathscr{A}_i$ y $\oplus_0 \mathscr{A}_i$ defina la involución natural $(x_i)_{i\in I} \overset{\star}{\mapsto} (x_i^*)_{i\in I}$. Muestre que $\oplus_\infty \mathscr{A}_i$ y $\oplus_0 \mathscr{A}_i$ son C*-álgebras.

Ejercicio 3. (Voluntario) Sea $\mathscr{A}$ una C*-álgebra sin identidad. Recuerde el álgebra $\mathscr{A}_1 :- \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}$, cuya norma se define por

$$\|(a, \alpha)\|_1 = \sup\{\|ax + \alpha x\| : x \in \mathscr{A}, \|x\| \le 1\}, \quad (a, \alpha) \in \mathscr{A}_1.$$

Muestre que $(\mathscr{A}_1, \|\cdot\|_1)$ es completo.