Universidad de los Andes, MATE-4246

Teoría de Operadores II

Taller 1

Álgebras de Banach

Fecha de entrega: 30 de enero de 2026

Alejandro Pineda

Ejercicio 1. Sea $\{\mathscr{A}_i\}_{i\in I}$ una colección de álgebras de Banach. Defina los espacios

$$\oplus_\infty \mathscr{A}_i := \left\{ x \in \prod_i \mathcal{A}_i : \sup_i \|x(i)\| < \infty \right\},$$

$$\oplus_0 \mathscr{A}_i := \left\{ x \in \prod_i \mathcal{A}_i : \forall \varepsilon > 0, \{i : \|x(i)\| \geq \varepsilon\} \text{ es finito} \right\},$$

junto con la norma

$$\|x\| := \sup_i \|x(i)\|.$$

(a) Muestre que $\oplus_\infty \mathscr{A}_i$ y $\oplus_0 \mathscr{A}_i$ son álgebras de Banach.

(b) Muestre que $\oplus_0 \mathscr{A}_i$ es un ideal cerrado de $\oplus_\infty \mathscr{A}_i$.

Ejercicio 2. Sean H un espacio de Hilbert y $A \in L(H)$. Muestre que

$$\sigma_l(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \text{ínf}\{\|(A-\lambda)x\| : \|x\| = 1\} = 0\}.$$