Teoría de operadores

Taller 10

Operadores relativamente acotados/compactos;
principio minmax.

Fecha de entrega: 24 de octubre 2025

---

1. Muestre que existen espacios de Hilbert H_1, H_2, y un operador lineal $T(H_1 \to H_2)$ y un operador S tal que S es T-compacto con T-cota 1.

   Hint. Considere un funcional lineal no acotado en H_1.

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $T, S(H \to H)$ operadores simétricos. Suponga que S es T-acotado con T-cota < 1. Muestre que $n_+(T+S) = n_+(T)$ y $n_-(T+S) = n_-(T)$.

   Hints. Basta mostrar que $\dim(\mathrm{rg}(T \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp) = \dim(\mathrm{rg}(T + S \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp)$ para un/todo $\lambda > 0$. Para mostrar $\dim(\mathrm{rg}(T + S \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp) \leq \dim(\mathrm{rg}(T \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp)$, se puede escoger, por ejemplo, $\lambda = a/b$ con a, b tal que $b < 1$ y $\|Sx\|^2 \leq a^2\|x\|^2 + b^2\|Tx\|^2$ para $x \in \mathcal{D}(T)$.

   Para mostrar que $\dim(\mathrm{rg}(T + S \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp) \geq \dim(\mathrm{rg}(T \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp)$ muestre que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}S$ tiene $(T + \mu S)$-cota < 1 para todo $\mu \in [0, 1]$. Concluye que

$$\begin{aligned}\dim\Big(\mathrm{rg}\left(T + S \pm \mathrm{i}\lambda\right)^\perp\Big) &= \dim\Big(\mathrm{rg}\left((T + \frac{n-1}{n}S) + \frac{1}{n}S \pm \mathrm{i}\lambda\right)^\perp\Big) \\ &\geq \dim\Big(\mathrm{rg}\left((T + \frac{n-1}{n}S) \pm \mathrm{i}\lambda\right)^\perp\Big) \geq \dots.\end{aligned}$$

3. Sea H un espacio vectorial, $T(H \to H)$ un operador autoadjunto y semiacotado por abajo. Sea $\alpha := \operatorname{ínf} \sigma_{ess}(T)$. Defina

$$\nu_n := \operatorname*{ínf}_{\substack{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(T) \\ \dim \mathcal{D} = n}} \sup_{\substack{x \in \mathcal{D} \\ \|x\| = 1}} \langle Tx\,, x\rangle$$

   y sean $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots <$ los valores propios debajo de α, con la convención $\lambda_n = \alpha$ si n es más grande que la cantidad de valores propios $< \alpha$. Demuestre que $\lambda_n = \nu_n$.

4. Under construction. Sea $T_0 : H^2(\mathbb{R}) \subseteq L_2(\mathbb{R}) \to L_2(R)$, $T_0 f = -f''$ y sea V el operador de multiplicación por $v(x) = M - C\chi_{|x| \leq R}$ para constantes $M \in \mathbb{R}$ y $C, R > 0$. ¿Qué puede decir sobre el espectro discreto y el espectro esencial de $T = T_0 + V$? ¿Cómo dependen de M, C, R?