Teoría de operadores

Taller 8

Indices de defecto; extensiones autoadjuntas.

Fecha de entrega: 10 de octubre 2025

---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $S(H \to H)$ un operador lineal densamente definido y clausurable. Muestre que $\Gamma(S) = \Gamma(\overline{S})$ y que $n(S, \lambda) = n(\overline{S}, \lambda)$ para todo $\lambda \in \Gamma(S)$. Concluya que $n(S, \cdot)$ es constante en componentes conexas de $\Gamma(S)$.

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $S(H \to H)$ un operador simétrico con indices de defecto $n_+(S) = n_-(S) = m < \infty$.

   (I) Sean T_1, T_2 extensiones autoadjuntas de S y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{rg}(T_1 - \lambda)$ no es cerrado. Muestre que $\mathrm{rg}(T_2 - \lambda)$ tampoco lo es. Concluya que $\sigma_c(T_1) \subseteq \sigma(T_2)$ y $\sigma_c(T_2) \subseteq \sigma(T_1)$.

   (II) Sea $\lambda \in \Gamma(S) \cap \mathbb{R}$. Muestre que existe una extensión autoadjunta T de S tal que λ es un autovalor de T de dimensión finita.

   Hint. $\dim(\ker(S^* - \lambda)) = ?$

3. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $S(H \to H), T(H \to H)$ operadores autoadjuntos. Suponga que existe un $z \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$ tal que $(S - z)^{-1} - (T - z)^{-1}$ es compacto.

   (a) Muestre que $(S - \lambda)^{-1} - (T - \lambda)^{-1}$ es compacto para todo $\lambda \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$.

   (b) Muestre que $\sigma_{\mathrm{ess}}(S) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$.

4. **Segunda derivada en el semieje.** Sea $H = L_2((0, \infty))$ y defina

$$S: \qquad \mathcal{D}(S) = H_0^2((0,\infty)) = \{f \in H : f, f' \text{ abs. cont. y } f', f'' \in H,\ f(0) = f'(0) = 0\}, \quad Sf = -f''.$$

   Sin prueba puede usar que

$$S^*: \qquad \mathcal{D}(S^*) = H^2((0,\infty)) = \{f \in H : f, f' \text{ abs. cont. y } f', f'' \in H\}, \quad S^* f = -f''.$$

   Segunda derivada en el intervalo. Sea $H = L_2((0, 1))$ y defina

$$T_0: \qquad \mathcal{D}(T_0) = H_0^2((0,1)) = \left\{ f \in H : \begin{array}{c} f, f' \text{ abs. cont. y } f', f'' \in H, \\ f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0 \end{array} \right\}, \quad T_0 f = -f''.$$

   Sin prueba puede usar que

$$T_{\max} := T_0^*: \qquad \mathcal{D}(T_0^*) = H^2((0,1)) = \{f \in H : f, f' \text{ abs. cont. y } f', f'' \in H\}, \quad T_0^* f = -f''.$$

   (a) Encuentre los indices de deficiencia de S. Encuentre una tripleta de frontera para S^* y encuentre todas las extensiones autoadjuntas de

   (b) Sea $\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{D}(T\max) : f(0) = f(1) = f'(1) = 0\}$. Encuentre T^*, una tripleta de frontera para T^* y todas las extensiones autoadjuntas de T.

   (c) Sea $\mathcal{D}(R) = \{f \in \mathcal{D}(T\max) : f'(0) = f'(1), f(0) = f(1) = 0\}$. Encuentre R^*, una tripleta de frontera para R^* y todas las extensiones autoadjuntas de R.