Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 6

Transformación de Cayley; resolución espectral;
fórmula de Stone.

Fecha de entrega: 19 de septiembre 2025

---

1. Sea H un espacio de Hilbert y sea $T(H \to H)$ un operador autoadjunto con resolución espectral $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

(a) Suponga que existe un $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\dim(\mathrm{rg}(E_{\gamma-0})) = m < \infty$. Demuestre que $\sigma(T) \cap (-\infty, \gamma)$ consiste solamente de finitos autovalores con multiplicidad total $\leq m$. Demuestre que T es semiacotado por abajo.

(b) Sea $U \subseteq H$ un subespacio cerrado con $\dim U^\perp = m < \infty$. Sea P la proyección ortogonal sobre U y suponga que $P(\mathcal{D}(T)) \subseteq \mathcal{D}(T)$. Suponga que existe un $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Tx\,, x\rangle \geq \gamma\|x\|^2$ para todo $x \in P(\mathcal{D}(T))$.
Demuestre que $\sigma(T) \cap (-\infty, \gamma)$ consiste solamente de finitos autovalores con multiplicidad total $\leq m$. Demuestre que T es semiacotado por abajo.

2. Sea A un operador autoadjunto y $z \in \varrho(A)$. Muestre que $\|(A-z)^{-1}\|^{-1} = \operatorname{dist}(z, \sigma(A))$.

3. Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo H con resolución espectral $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Muestre

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \left[(A-\lambda-\mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (A-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1}\right] \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\big(E([a,b]) + E((a,b))\big).$$

4. Sea H un espacio de Hilbert y $Q \in L(H)$ una proyección ortogonal.

(a) Use la fórmula de Stone para calcular la resolución espectral de Q.

(b) Calcule la transformación de Cayley de Q.

Ejercicio voluntario

---

5. Sea $P : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n),\ (Pf)(t) = f(-t)$. Muestre que P es autoadjunto, calcule su espectro y su resolución espectral.