

Teoría de operadores

Taller 5

Transformada de Cayley; teorema espectral.

Fecha de entrega: 12 de septiembre 2025

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo, A un operador autoadjunto tal que A^{-1} existe y es densamente definido. Sea U la transformada de Cayley de A . Muestre:

- (a) A^{-1} es simétrico.
- (b) La transformada de Cayley de A^{-1} es $-U^{-1}$.
- (c) A^{-1} es autoadjunto.

2. Sea $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert complejo H y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Defina el operador $A(H \rightarrow H)$ por

$$\mathcal{D} := \left\{ x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle x, e_n \rangle|^2 < \infty \right\}, \quad Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{for } x \in \mathcal{D}.$$

- (a) Muestre que A es bien definido, cerrado y simétrico.
- (b) Encuentre la transformada de Cayley de A .

3. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $A \in L(H)$ un operador autoadjunto y $f \in C(\sigma(A))$. Muestre que $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$. Muestre que $f(A)x = f(\lambda)x$ si $Ax = \lambda x$.

4. Sea $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una resolución de la identidad y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Defina $A(H \rightarrow H)$ por

$$Ax := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda x \quad \text{para } x \in \mathcal{D}(A) := \left\{ x \in H : \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda x, x \rangle < \infty \right\}.$$

- (a) $\text{rg}(E_\lambda - E_\mu) \subseteq \mathcal{D}(A)$ para todo $\mu < \lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio denso de H y A es bien definido.
- (c) A es autoadjunto.
- (d) $E_\lambda A \subseteq AE_\lambda$.