

Teoría de operadores

Taller 4

Teorema espectral; cálculo funcional.

Fecha de entrega: 05 de septiembre de 2025

1. Sea $R : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N})$, $R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ para $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Existe un operador $A \in L(\ell_2(\mathbb{N}))$ tal que $A^2 = S$?
2. Sea A un operador autoadjunto acotado en un espacio de Hilbert complejo H con resolución espectral $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Muestre que A es compacto si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ la proyección $E(\{|\lambda| > \varepsilon\})$ tiene rango finito.
3. Sean A y B operadores acotadas autoadjuntas en un espacio de Hilbert H con resoluciones espectrales $(E_A(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ y $(E_B(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Si $A \geq B$, entonces¹ $\dim E_A(\lambda) \leq \dim E_B(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in L(H)$.
 - (a) Muestre que $\text{Exp}(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ converge en norma. Muestre que $(\text{Exp}(A))^* = \text{Exp}(A^*)$.
En particular, $\text{Exp}(A)$ es autoadjunto y $(\text{Exp}(iA))^* = \text{Exp}(-iA)$ si A es autoadjunto.
 - (b) Muestre que $\text{Exp}(A) = \exp(A)$ si A es autoadjunto y $\exp(A)$ es definido a través del cálculo funcional.

¹usando la notación $\dim P := \dim(\text{rg } P)$ para una proyección ortogonal P .