Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores — Taller 3

Cálculo funcional. — Fecha de entrega: 29 de agosto de 2025

---

1. Sea H un espacio de Hilbert, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ una resoluión de la identidad en H y $f, g \in I[a,b]$. Muestre:

   (a) $\Big\langle \Big(\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big) x\,, y \Big\rangle = \int_a^b f(\lambda)\ \mathrm{d}\langle E_\lambda x\,, y\rangle, \qquad x, y \in H;$

   (b) $\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = 0$ para $f \equiv 0, \qquad \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \int_a^b \mathrm{d}E_\lambda = E_b - E_a$ para $f \equiv 1;$

   (c) $E_\mu \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \int_a^\mu f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda, \quad a \le \mu \le b;$

   (d) $\Big(\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big)\Big(\int_a^b g(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big) = \int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda;$

   (e) $\Big(\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big)^* = \int_a^b \overline{f(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda;$

   (f) $\Big\| \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x \Big\|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2\,, \quad x \in H.$

2. (a) Sea H un espacio de Hilbert, sean $\varphi : \mathbb{R} \to (a,b)$, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ y $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ como en problema 3 del taller 2. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f|_{[a_0,b_0]} \subseteq I[a_0,b_0]$ para cada subintervalo compacto $[a_0,\, b_0]$ de (a,b). Muestre:

   (I) $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda$ para todo $[\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$.

   (II) Sea $x \in H$. Entonces $\int_{a+0}^{b-0} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x$ existe si y solo si $\int_{-\infty}^{\infty} (f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda x$ existe.[1]

   (b) Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $A \in L(H)$ un operador autoadjunto y $B := \varphi(A)$. Muestre $(f\circ\varphi)(A) = f(B)$.

3. Sea $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ definido por

$$(Ax)(t) := a(t)x(t), \qquad t \in (0,1), \quad x \in L_2(0,1).$$

   (a) Muestre que A es autoadjunto.

   (b) Encuentre $m := \operatorname{ínf}_{x\in H, \|x\|=1} \langle Ax,\, x\rangle$ y $M := \sup_{x\in H, \|x\|=1} \langle Ax,\, x\rangle$.

   (c) Encuentre el espectro de A.

4. Sea A como en el ejercio 3. Encuentre la resolución espectral de A.

---

[1] $\int_{a+0}^{b-0} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x := \lim_{\substack{\lambda_1 \searrow a\\ \lambda_2 \nearrow b}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda x := \lim_{\substack{\lambda_1 \searrow -\infty\\ \lambda_2 \nearrow \infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda\, x$