Teoría de operadores

Taller 2

Integral de Riemann-Stieltjes;
resolución de la identidad.

Fecha de entrega: 28 de agosto de 2020

1. Sea $\alpha \in BV[a, b]$, $f \in I[a, b]$ y defina $K : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ por $K(x) := \int_a^x f(t) d\alpha(t)$ para $x \in (a, b]$ y $K(a) := 0$. Muestre:
- $K \in BV[a, b]$.
 - Si α es continua por la derecha en $s \in [a, b)$, entonces K también lo es.
 - $\int_a^b g(t) dK(t) = \int_a^b (fg)(t) d\alpha(t)$ para todo $g \in I[a, b]$.

2. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador compacto autoadjunto con autovalores distintos μ_j . Sea P_j la proyección ortogonal sobre el espacio propio de T respecto a λ_j . Muestre que $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una resolución de la identidad donde

$$E_\lambda x := \begin{cases} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} P_j x, & \lambda < 0, \\ x - \sum_{\lambda_j > \lambda} P_j x, & \lambda \geq 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, x \in H.$$

3. Sea H un espacio de Hilbert, $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una resolución de la identidad en H y $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ una biyección continua no decreciente. Suponga que $E_a = 0$ y $E_{b-0} = E_b = I$. Muestre que $(F(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una resolución de la identidad en H donde

$$F_\lambda := E_{\varphi(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definición 1. Sea $(\Omega, \mathfrak{A})$ un espacio medible (es decir $\mathfrak{A}$ es una σ -álgebra sobre Ω) y sea H un espacio de Hilbert. Una función $E : \mathfrak{A} \rightarrow L(H)$ se llama *projection valued measure* o *spectral measure* si

- $E(M)$ es una proyección ortogonal para todo $M \in \mathfrak{A}$,
 - $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = \text{id}$,
 - $E(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n)x = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(M_n)x$ para $M_j \in \mathfrak{A}$ disjuntos dos a dos y para todo $x \in H$.
4. (a) Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $H = L_2(\Omega)$. Demuestre que $E : \mathfrak{A} \rightarrow L(H)$ definida por $E(M)f := \chi_M f$ para todo $M \in \mathfrak{A}$ y $f \in H$ es una medida espectral.
- (b) Sea $(\Omega, \mathfrak{A})$ un espacio medible, H un espacio de Hilbert y $E : \mathfrak{A} \rightarrow L(H)$ una medida espectral. Demuestre que $E(M \cap N) = E(M)E(N)$ para todo $M, N \in \mathfrak{A}$.