Teoría de operadores

Taller 1

Fecha de entrega: 15 de agosto de 2025

1. Sea H un espacio de Hilbert. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores ortogonales dos a dos en H , entonces lo siguiente es equivalente:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en H .
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle$ converge para todo $y \in H$.

2. Sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert H . Demuestre que

$$\|P_1 - P_2\| = \max\{\varrho_{12}, \varrho_{21}\}$$

donde

$$\varrho_{jk} := \sup \left\{ \|P_j x\| : x \in \text{rg}(P_k)^\perp, \|x\| \leq 1 \right\}.$$

3. Si P y Q son proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert H tales que $\|P - Q\| < 1$, entonces

$$\dim(\text{rg } P) = \dim(\text{rg } Q), \quad \dim(\text{rg}(I - P)) = \dim(\text{rg}(I - Q)).$$

4. Sea S el right shift en $\ell_2(\mathbb{Z})$ definido por

$$(Sx)_k = x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ pertenece a $\ell_2(\mathbb{Z})$. Determine $\sigma_p(S)$, $\sigma_c(S)$, $\sigma_r(S)$.

5. **Voluntario.** Sean X, Y espacios de Banach y $T : \mathcal{D} \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal densamente definido. Demuestre lo siguiente.

- (a) T' es cerrado.
- (b) Si T' es densamente definido, entonces T es clausurable.
- (c) Suponga que X, Y son reflexivos. Entonces T' es densamente definido si y solo si T es clausurable.