Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 13

Producto de semigrupos.

Fecha de entrega: 27 de noviembre 2020
en este enlace

---

1. Sea X un espacio de Banach y sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Para $P, Q : I \to L(X)$ demuestre:

   (a) Si P y Q son fuertemente continuas, entonces su producto $PQ : I \to L(X)$, $(PQ)(t) := P(t)Q(t)$ también es fuertemente continuo.

   (b) Si P y Q son fuertemente difernciables, entonces su producto $PQ : I \to L(X)$, $(PQ)(t) := P(t)Q(t)$ también es fuertemente diferenciable.

2. Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en X con generador infinitesimal $(A, \mathcal{D}(A))$. Suponga que $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}(A)$ es denso en X y que es invariante bajo el semigrupo (es decir, $T(t)x \in \mathcal{D}_0$ para todo $x \in \mathcal{D}_0$ y $t \geq 0$). Demuestre que $\mathcal{D}_0$ es un *core* de A.

   Sugerencia. Sin restriccón podemos asumir que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\} \subseteq \varrho(A)$. Según un taller anterior es suficiente probar que $A(\mathcal{D}_0)$ es denso en X. Es más o menos claro que para todo $x \in \mathcal{D}_0$ y $t \geq 0$ el elemento

   $$\frac{1}{t} A \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax \, \mathrm{d}s$$

   pertence a la clausura de $A(\mathcal{D}_0)$ ya que la integral es límite de sumas de Riemann.

3. Sea X un espacio de Banach y sean $(S(t))_{t\geq 0}$ y $(T(t))_{t\geq 0}$ semigrupos fuertemente continuos y suponga que $S(t)T(t) = T(t)S(t)$ para todo $t \geq 0$.

   (a) Demuestre que $S(s)T(t) = T(t)S(s)$ para todo $s, t \geq 0$.

   (b) Para $t \geq 0$ defina $U(t) := S(t)T(t)$. Demuestre que $(U(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

4. Sea X un espacio de Banach y sean $(S(t))_{t\geq 0}$ y $(T(t))_{t\geq 0}$ semigrupos fuertemente continuos que conmutan con generadores A y B y defina $U(t) = S(t)T(t)$. Sea C el generador de $(U(t))_{t\geq 0}$.

   (a) Demuestre que $\mathcal{D}_0 := \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(C)$ y que es un *core* para C.

   (b) Demuestre que $Cx = Ax + Bx$ para todo $x \in \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.