Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 13

Yosida approximants; shift semigrupo.

Fecha de entrega: 20 de noviembre 2020
en este enlace

---

1. Sea X un espacio de Banach, $A(X \to X)$ un operador lineal y $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subseteq \varrho(A)$ y $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)}$. Para $\lambda > \omega$ defina $A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1}$. Muestre:
   (a) $A_\lambda \in L(X)$,
   (b) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}x = x$, $x \in X$,
   (c) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo y acotado en X (es decir, existe un $R \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(t)\| \leq R$ para todo $t \geq 0$). Entonces

$$\|x\|_{\mathcal{T}} := \sup\{\, \|T(s)x\| : s \geq 0 \,\}, \quad x \in X,$$

   define una norm que es equivalente a $\|\cdot\|$.

3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo y acotado en X. Muestre que existe un norma $\|\cdot\|_1$ en X que es equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $\mathcal{T}$ es un semigrupo de contracción con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$.

4. Sea $X = \{f \in C[0,1] : f(1) = 0\}$ y

$$T(t) : X \to X, \quad T(t)f(\xi) = \begin{cases} f(\xi + t), & \text{si } 0 \leq \xi + t \leq 1, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

   Muestre que $(T(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en X. Halle su generador y su cota de crecimiento.