Teoría de operadores

Taller 11

Estabilidad de indices de defecto.

Fecha de entrega: 06 de noviembre de 2020
en este enlace

1. Sea H un espacio de Hilbert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ y $K \in L(H)$ un operador compacto. Suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x_0. Muestre que $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $T, S(H \to H)$ operadores simétricos. Suponga que S es T-acotado con T-cota < 1. Muestre que $n_+(T+S) = n_+(T)$ y $n_-(T+S) = n_-(T)$.

   Hints. Basta mostrar que $\dim(\operatorname{rg}(T \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp) = \dim(\operatorname{rg}(T+S\pm\mathrm{i}\lambda)^\perp)$ para un/todo $\lambda > 0$. Para mostrar $\dim(\operatorname{rg}(T+S\pm\mathrm{i}\lambda)^\perp) \leq \dim(\operatorname{rg}(T\pm\mathrm{i}\lambda)^\perp)$, se puede escoger, por ejemplo, $\lambda = a/b$ con a, b tal que $b < 1$ y $\|Sx\|^2 \leq a^2\|x\|^2 + b^2\|Tx\|^2$ para $x \in \mathcal{D}(T)$.

   Para mostrar que $\dim(\operatorname{rg}(T+S\pm\mathrm{i}\lambda)^\perp) \geq \dim(\operatorname{rg}(T\pm\mathrm{i}\lambda)^\perp)$ muestre que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}S$ tiene $(T+\mu S)$-cota < 1 para todo $\mu \in [0, 1]$. Concluye que

$$\begin{aligned}\dim\Big(\operatorname{rg}\big(T+S\pm\mathrm{i}\lambda\big)^\perp\Big) &= \dim\Big(\operatorname{rg}\big((T+\frac{n-1}{n}S)+\frac{1}{n}S\pm\mathrm{i}\lambda\big)^\perp\Big)\\ &\geq \dim\Big(\operatorname{rg}\big((T+\frac{n-1}{n}S)\pm\mathrm{i}\lambda\big)^\perp\Big) \geq \dots.\end{aligned}$$

3. Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T(X \to Y$ y $S(X \to Z)$. Suponga que S es clausurable y T-compacto. Demuestre que S tiene T-cota 0.

4. En un espacio de Hilbert H considere $T(H \to H)$ autoadjunto y $\lambda \in \sigma_d(T)$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $B \in L(H)$ de rango finito con $\|B\| < \varepsilon$ tal que $\lambda \notin \sigma(T+B)$.

Ejercicio voluntario

5. Para $\alpha > 0$ encuentre $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\alpha^2+k^2)^2}\,\mathrm{d}^3k$.