Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 10

Operadores con inversa compacta;
operadores relativamente acotados/compactos.

Fecha de entrega: 30 de octubre 2020
en este enlace

---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $T(H \to H)$ un operador autoadjunto y semiacotado por abajo con cota inferior γ (es decir, $\langle Tx\,, x\rangle \geq \gamma\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$). Sea $S(H \to H)$ un operador simétrico y T-acotado con T-cota < 1. Muestre que $T + S$ es semiacotado por abajo.

2. Sea X un espacio de Banach y $T(X \to X)$ un operador lineal cerrado. Sea $S(X \to X)$ con $\mathcal{D}(S) \supseteq \mathcal{D}(T)$ y $z \in \varrho(T)$. Muestre que S es T-compacto[1] si y solo si $S(T-z)^{-1}$ es compacto.

3. Muestre que existen espacios de Hilbert H_1, H_2, y un operador lineal $T(H_1 \to H_2)$ y un operador S tal que S es T-compacto con T-cota 1.

   Hint. Considere un funcional lineal no acotado en H_1.

4. Sea X un espacio de Banach, $T(X \to X)$ un operador cerrado con $\varrho(T) \neq \emptyset$ y $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}(T)$. Muestre que $\mathcal{D}_0$ es un *core*[2] of T si y solo si $(T - \lambda)\mathcal{D}_0$ es denso en X para un (para todo) $\lambda \in \varrho(T)$.

Ejercicio voluntario

---

5. Let $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ and let $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be the standard unit vectors in X. Defina operadores lineales T y A por

$$\begin{aligned} &T : X \to X, \qquad Tx_0 := 0, \qquad Tx_n := x_{n-1}, \quad n \neq 0,\\ &A : X \to X, \qquad Ax_0 := x_{-1}, \quad Sx_n := 0, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

   (a) Muestre que $\sigma_p(T) = \{|z| < 1\}$, $\sigma_c(T) = \{|z| = 1\}$, $\sigma_r(T) = \varnothing$.

   (b) Muestre que $\sigma_p(T + \varepsilon A) = \varnothing$, $\sigma_c(T + \varepsilon A) = \{|z| = 1\}$, $\sigma_r(T + \varepsilon A) = \varnothing$ para todo $\varepsilon > 0$.

   Hint. Muestre que $T + \varepsilon A$ es invertible y calcule el radio espectral del operador inverso.

---

[1] S se llama T-compacto si $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ y para toda sucesón $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ tal que ella y $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas, la sucesión $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente.

[2] Un subespacion $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}(T)$ es un *core* del operador cerrado T si la clausura de la restricción $T|_{\mathcal{D}_0}$ es igual a T.