

# Teoría de operadores

## Taller 7

Transformada de Cayley;  
espectro de operadores autoadjuntos.

Fecha de entrega: 2 de octubre de 2020  
[en este enlace](#)

---

1. Sea  $H$  un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sea  $T \in L(H)$  un operador autoadjunto. Demuestre que  $T$  es compacto si y solo si  $\sigma_{\text{ess}}(T) = \{0\}$ .
  2. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $T(H \rightarrow H)$  un operador autoadjunto. Demuestre que lo siguiente es equivalente:
    - (a)  $\sigma(T) = \sigma_d(T)$ .
    - (b)  $(T - \lambda)^{-1}$  es compacto para un  $\lambda \in \rho(T)$ .
    - (c)  $\rho(T) \neq \emptyset$  y  $(T - \lambda)^{-1}$  es compacto para todo  $\lambda \in \rho(T)$ .
  3. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $T(H \rightarrow H)$  un operador autoadjunto con resolución espectral  $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$ .
    - (a) Suponga que existe un  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $\dim(\text{rg}(E_{\gamma-0})) = m < \infty$ . Demuestre que  $\sigma(T) \cap (-\infty, \gamma)$  consiste solamente de finitos autovalores con multiplicidad total  $\leq m$ . Demuestre que  $T$  es semiacotado por abajo.
    - (b) Sea  $U \subseteq H$  un subespacio cerrado con  $\dim U^\perp = m < \infty$ . Sea  $P$  la proyección ortogonal sobre  $U$  y suponga que  $P(\mathcal{D}(T)) \subseteq \mathcal{D}(T)$ . Suponga que existe un  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $\langle Tx, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$  para todo  $x \in P(\mathcal{D}(T))$ . Demuestre que  $\sigma(T) \cap (-\infty, \gamma)$  consiste solamente de finitos autovalores con multiplicidad total  $\leq m$ . Demuestre que  $T$  es semiacotado por abajo.
  4. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $Q \in L(H)$  una proyección ortogonal.
    - (a) Use la fórmula de Stone para calcular la resolución espectral de  $Q$ .
    - (b) Calcule la transformada de Cayley de  $Q$ .
- 
- 

### Ejercicio voluntario

---

---

5. Sea  $T : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ ,  $Tx = (-\frac{1}{n}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Muestre que existe un vector cíclico y calcule la representación espectral de  $T$ .