Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 6

Transformada de Cayley; resolución espectral;
fórmula de Stone.

Fecha de entrega: 25 de septiembre 2020
en este enlace

---

1. (a) ¿El left shift en $\ell_2(\mathbb{N})$ es la transformada de Cayley de un operador simétrico A? Si es así, determine A y sus indices de defecto $\dim(\operatorname{rg}(A \pm \mathrm{i})^{\perp})$.

   (b) ¿El right shift en $\ell_2(\mathbb{N})$ es la transformada de Cayley de un operador simétrico B? Si es así, determine B y sus indices de defecto $\dim(\operatorname{rg}(B \pm \mathrm{i})^{\perp})$.

2. Sea A un operador autoadjunto y $z \in \varrho(A)$. Muestre que $\|(A-z)^{-1}\|^{-1} = \operatorname{dist}(z, \sigma(A))$.

3. Sea $P : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $(Pf)(t) = f(-t)$. Muestre que P es autoadjunto, calcule su espectro y su resolución espectral.

4. Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo H con resolución espectral $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Muestre

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_a^b \left[(A-\lambda-\mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (A-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1}\right] \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\big(E([a,b]) + E((a,b))\big).$$